ESPACES VECTORIELS

Premières notions

K désigne un corps de caractéristique nulle

1 Définitions

Soit E un ensemble non vide

Définition 1 *On appelle* **K** *espace vectoriel, un ensemble E non vide muni de deux lois notées $+$ et $\cdot$:*
$+$ et $\cdot$ vérifient :

1. *$(E,+)$ est un groupe commutatif :*
   $\forall(x,y)\in E^2 \quad x+y\in E$ *(+ est une loi interne)*
   $\forall(x,y,z)\in E^3 \quad (x+y)+z=x+(y+z)$ *(est une loi associative)*
   $\forall(x,y)\in E^2 \quad x+y=y+x$ *(+ est une loi commutative)*
   $\exists e\in E \quad tq \quad \forall x\in E \quad e+x=x+e$ *(+ possède un élément neutre)*
   e se note souvent O_E ou $\overrightarrow{O}$
   $\forall x\in E \quad \exists x'\in E \quad tq \quad x+x'=x'+x=O_E$ *(tout élément possède un symétrique)*
   x' se note $-x$
2. *la loi externe $\cdot$ vérifie :*
   $\forall(\lambda,x)\in\mathbf{K}\times E \quad \lambda\cdot x\in E$ *($\cdot$ est une loi externe)*
   $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbf{K}^2 \quad \forall(x,y)\in E^2$:
   $$\begin{aligned}\lambda\cdot(\mu\cdot x)&=(\lambda\cdot\mu)\cdot x\\(\lambda+\mu)\cdot x&=\lambda\cdot x+\mu\cdot x\\\lambda\cdot(x+y)&=\lambda\cdot x+\mu\cdot y\\1\cdot x&=x\end{aligned}$$

Les éléments de $(E,+,\cdot)$ sont appelés des vecteurs, $x\in E$ se note $\overrightarrow{x}$
Les éléments de **K** *sont appelés des scalaires.*

Exemple 1

- *$(\mathbf{K}^n,+,.)$ est un* **K** *espace vectoriel avec les deux lois :*
  – $\forall(\vec{x},\vec{y})\in(\mathbf{K}^n)^2, \vec{x}=(x_1,\dots,x_n),\ \vec{y}=(y_1,\dots,y_n), \quad (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$
  – $\forall(\lambda,\vec{x})\in\mathbf{K}\times\mathbf{K}^n,\ \lambda\cdot(x_1,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$
- *Si A est un ensemble non-vide, F est un* **K** *espace vectoriel et $\mathcal{F}(A,F)$ désigne l'ensemble des applications de A dans F, $(\mathcal{F}(A,F),+,\cdot)$ est un* **K** *espace vectoriel pour les deux lois :*
  – $\forall(f,g)\in(\mathcal{F}(A,F))^2$ *$f+g$ est l'application définie par $\forall t\in A,\ (f+g)(t)=f(t)+g(t)$.*
  – $\forall(\lambda,f)\in\mathbf{K}\times\mathcal{F}(A,F)$ *$\lambda\cdot f$ est l'application définie par $\forall t\in A,\ (\lambda\cdot f)(t)=\lambda\cdot f(t)$.*
- **Espace vectoriel produit**
  Si $(E_1,+,.)$ et $(E_2,+,.)$ sont deux **K** *espaces vectoriels on munit $E_1\times E_2$ d'une structure d'espace vectoriel avec les deux lois :*
  – $\forall(\vec{x},\vec{y})\in(E_1\times E_2)^2,\ \vec{x}=(\vec{x_1},\vec{x_2}),\ \vec{y}=(\vec{y_1},y_2)$ *on définit $\vec{x}+\vec{y}=(\vec{x}_1+\vec{y_1},\vec{x}_2+\vec{y}_2)$*
  – $\forall(\lambda,\vec{x})\in\mathbf{K}\times E_1,\ \vec{x}=(\vec{x_1},\vec{x_2})$ *on définit $\lambda\cdot\vec{x}=(\lambda\cdot\vec{x}_1,\lambda\cdot\vec{x}_2)$*

Définition 2 *Soit $(E,+,\cdot)$ un* **K** *espace vectoriel et F une partie de E. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si F est non vide et $(F,+,\cdot)$ est un* **K** *espace vectoriel.*

Proposition 1 *Soit $(E,+,\cdot)$ un* **K** *espace vectoriel et F une partie de E.*
F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si

1. $F\neq\emptyset$
2. $\forall(x,y)\in F^2,\ \forall\lambda\in\mathbf{K}, \quad x+\lambda\cdot y\in F$

Dans la suite $(E,+,\cdot)$ désignera un **K** espace vectoriel noté simplement E

2 Règles de calculs

- $\forall\overrightarrow{x}\in E \quad 0\cdot\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0}$
- $\forall\alpha\in\mathbf{K} \quad \alpha\cdot\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$
- $\alpha\cdot\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\alpha=0$ *ou* $\vec{x}=\vec{0}$
- $\forall(\vec{x},\vec{y})\in\mathbf{K}\times E \quad \alpha\cdot(-\vec{x})=(-\alpha)\cdot\vec{x}=-(\alpha\cdot\vec{x})$

3 Applications linéaires

Définition 3 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels,*
on appelle application linéaire de E dans F toute application f de E dans F telle que :
$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in \mathbb{E}^2, \forall\lambda \in \mathbf{K},\ f(\vec{x},+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ *et* $f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x})$

On note $\mathbf{L(E,F)}$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
Si $E = F$ les éléments de $L(E,F)$ s'appellent des **endomorphismes** de E et on note $\mathbf{L(E)} = \mathbf{L(E,F)}$
Si $f \in L(E,F)$ et f est bijective on dit que f est un **isomorphisme**, on note $\mathbf{GL(E,F)}$ l'ensemble des isomorphismes de E sur F
Si $f \in L(E)$ et f est bijective on dit que f est un **automorphisme**, on note $\mathbf{GL(E)}$ l'ensemble des automorphismes de E

Proposition 2 $(L(E,F),+,\cdot)$ *et* $(L(E),+,\cdot)$ *sont deux* $\mathbf{K}$ *espaces vectoriels.*

! $\mathbf{GL(E,F)}$ et $\mathbf{GL(E)}$ ne sont pas des sous espaces vectoriels de $(\mathbf{L(E,F)},+,\cdot)$ et $(\mathbf{L(E)},+,\cdot)$

Définition 4 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels et $f \in L(E,F)$.*
- *On appelle* **noyau** *de f la partie de E notée* $\mathbf{ker}f$ *et définie par* $\mathbf{ker}f = ^{-1} f(0_F) = \{\vec{x} \in E, f(\vec{x}) = 0_F\}$
- *On appelle* **image** *de f la partie de F notée* $\mathbf{Im}\ f$ *et définie par* $\mathbf{Im}\ f = f(E) = \{\vec{y} \in F\ tq\ \exists\vec{x} \in E\ f(\vec{x}) = \vec{y}\}$

Proposition 3 *Soit $f \in L(E,F)$,* $\mathbf{ker}f$ *est un sous espace vectoriel de E et* $\mathbf{Im}f$ *est un sous espace vectoriel de F*

Proposition 4 *Soit $f \in L(E,F)$ on a*
- *f est injective si et seulement si* $\ker f = \{0\}$
- *f est surjective si et seulement si* $\mathrm{Im} f = F$

4 Combinaisons linéaires

Soit $(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbf{K}^n$.
Le vecteur de E, $\vec{x} = \sum_1^n \lambda_i \vec{x}_i$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n$

Proposition 5 *Soit $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p$ p vecteurs de E.*
L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p$ est un sous espace vectoriel de E.

On note $\mathbf{vect} < \vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p >= \{\vec{x} = \sum_{i=1}^p \lambda_i\vec{x}_i,\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbf{K}^p\}$

Proposition 6 *Soit $A \subset E$, il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E au sens de l'inclusion contenant A. Ce sous-espace vectoriel est unique, il s'appelle le sous espace vectoriel engendré par A, on le note $vect < A >$ on a :*

$$vect < A >= \bigcap_{\substack{F\subset E\\ F\ sev}} F \qquad et \qquad vect < A >= \{\sum_{finie} \lambda_i \cdot \vec{x}_i,\ \vec{x}_i \in A,\ \lambda_i \in \mathbf{K}\ \forall i\}$$

.

Remarque 1 $\mathbf{vect} < \vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p >= \mathbf{vect} < \{\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p\} >$
$\mathbf{vect} < \vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p >$ *est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p$.*

Proposition 7 *Soit $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p$ p vecteurs de E et F un sous espace vectoriel de E.*
Si $\forall i \in \{1,\ldots,p\}\},\ \vec{x}_i \in F$ *alors* $\mathbf{vect} < \vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p > \subseteq F$.

Propriété 1 *Soit F=*$\mathbf{vect}< \vec{x}_i >_{i\in I}$ *et G=*$\mathbf{vect}< \vec{y}_j >_{j\in J}$ *deux sous espaces vectoriels de E engendrés respectivement par $(\vec{x}_i)_{i\in I}$ et $(\vec{y}_j)_{j\in J}$*
Si $\forall i \in I$ $\vec{x}_i \in G$ alors $F \subset G$
Si $\forall i \in I$ $\vec{x}_i \in G$ et $\forall j \in J$ $\vec{y}_j \in F$ alors $F = G$

Proposition 8 *Soit $\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_p$ p vecteurs de E et $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ des scalaires.*
- $vect < \vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_p >= vect < \vec{x}_1, \vec{x}_2 + \lambda_2 \cdot \vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_p + \lambda_p \cdot \vec{x}_1 >$
- $vect < \vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_i,\cdots,\vec{x}_j,\cdots,\vec{x}_p >= vect < \vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_j,\cdots,\vec{x}_i,\cdots,\vec{x}_p >$
- *Si* $\lambda_i \neq 0 \quad vect < \vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_i,\cdots\vec{x}_p >= vect < \vec{x}_1,\cdots,\lambda_i \cdot \vec{x}_i,\cdots\vec{x}_p >$

Ces propriétés sont utiles dans les espaces vectoriels de dimension finie.

Proposition 9 *$vect < A >$ est un sous espace vectoriel de E, et si $A \subset F$ avec F sous espace vectoriel de E alors $vect < A > \subset F$. $vect < A >$ est le sous espace vectoriel de E engendré par A.*

5 Somme de sous espaces vectoriels

5.1 Définition

Définition 5 *Soit E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E.*
On appelle somme des sous espaces vectoriels E_1 et E_2 et on note $E_1 + E_2$ la partie de E définie par :
$E_1 + E_2 = \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in E,\ \vec{x}_1 \in E_1 \text{ et } \vec{x}_2 \in E_2\}$

Proposition 10 *$E_1 + E_2$ est un sous espace vectoriel de E, c'est le sous espace vectoriel engendré par $E_1 \cup E_2$*
$E_1 + E_2 = vect < E_1 \cup E_2 >$

5.2 Somme directe

Définition 6 *Soit E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E. On dit que E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si $\forall \vec{x} \in E_1 + E_2,\ \exists!(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$ tq $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$.*
On note $E_1 \oplus E_2$ la somme des deux sous espaces E_1 et E_2 lorsque celle-ci est directe.

Proposition 11 *Soit E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels de E.*
E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$

5.3 Espaces supplémentaires

Définition 7 *Deux sous espaces vectoriels de E sont dits supplémentaires si et seulement si $E = E_1 \oplus E_2$*

Proposition 12 *Deux sous espaces vectoriels E_1 et E_2 de E sont supplémentaires si et seulement si*

1. $\forall \vec{x} \in E,\ \exists(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$ *tq* $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$
2. $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$

Exemple 2
On considère $E = K[X]$ le K espace vectoriel des polynômes à cœfficients dans K, $n \in \mathbb{N}$, E_n le sous-espace des ploynômes de E de degré inférieur ou égal à n et $P \in E$, $d°P = n + 1$
on a $E = E_n \oplus P\mathbf{K}[X]$ avec $P\mathbf{K}[X] = \{PQ,\ Q \in E\}$

5.4 Somme de p sous espaces vectoriels

Pour $E_1, \cdots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E on définit :
$E_1 + \cdots + E_p = vect < E_1 \cup \cdots \cup E_p > = \{\vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_p \in E,\ (\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p\}$

Définition 8 *Soit $E_1, \cdots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E. On dit que $E_1, \cdots, E_p$ sont en somme directe si et seulement si : $\forall \vec{x} \in E_1 + \cdots + E_p$, il existe une unique famille $(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tq $\vec{x} = \sum_{i=1}^{p} \vec{x}_i$*
on note $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$

Proposition 13 *$E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ si et seulement si $\forall (\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_p) \in E_1 \times \cdots E_p,\ \vec{x}_1 + \cdots + \vec{x}_p = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}_1 = \cdots = \vec{x}_p = \vec{0}$*

5.5 Somme d'espaces vectoriels et applications linéaires

goodbye

5.5.1 Définition d'application linéaire

Proposition 14 *Soit E_1 et E_2 deux sous espaces supplémentaires de E, F un espace vectoriel, u_1 et u_2 deux applications linéaires de $\mathcal{L}(E_1, F)$ et $\mathcal{L}(E_2, F)$ respectivement.*
Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que les restrictions de u à E_1 et E_2 respectivement sont u_1 et u_2, $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$

On a un résultat similaire si E est la somme de p sous espaces vectoriels.

Proposition 15 *Soit $E_1, E_2 \cdots E_p$ p sous espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2 \cdots \oplus E_p$, F un espace vectoriel, $u_1, u_2 \cdots u_p$ p applications linéaires de $\mathcal{L}(E_1, F), \mathcal{L}(E_2, F) \cdots \mathcal{L}(E_p, F)$respectivement*
Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que les restrictions de u à E_1,$E_2 \cdots E_p$ soient respectivement $u_1, u_2 \cdots u_p$, $u_{|E_1} = u_1$, $u_{|E_2} = u_2 \cdots u_{|E_p} = u_p$

On détermine une application linéaire de $\mathcal{L}(E,F)$ et ses propriétés en étudiant ses rectrictions à des sous espaces vectoriels en somme directe dont la somme est E.

Remarque 2 *On utilisera la proposition précédente pour l'étude des endomorphismes plutôt sous la forme suivante :*

Proposition 16 *Soit $E_1, E_2 \cdots E_p$ p sous espaces vectoriels de E tels que* $E = E_1 \oplus E_2 \cdots \oplus E_p$, $u_1, u_2 \cdots u_p$ *p applications linéaires de $\mathcal{L}(E_1), \mathcal{L}(E_2) \cdots \mathcal{L}(E_p)$ respectivement*
Il existe un unique endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que les restrictions de u à E_1,$E_2 \cdots E_p$ soient respectivement $u_1, u_2 \cdots u_p$, $u_{|E_1} = u_1$, $u_{|E_2} = u_2 \cdots u_{|E_p} = u_p$

5.5.2 Projections vectorielles

Définition 9

Soit E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E, $E = E_1 \oplus E_2$

Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, $\forall \vec{x} \in E_1$, $u_1(\vec{x}) = \vec{x}$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$, $\forall \vec{x} \in E_2$, $u_2(\vec{x}) = \vec{0}$

On appelle projection vectorielle sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique endomorphisme p de E dont les restrictions à E_1 et E_2 sont respectivement u_1 et u_2
$\forall \vec{x} \in E$ avec $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$, $(\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E_1 \times E_2$, on a : $p(\vec{x}) = \vec{x_1}$
$E_1 = \ker(p - Id)$ et $E_2 = \ker p$

Une telle application linéaire s'appelle aussi un **projecteur**

Théorème 1 *Soit $p \in \mathcal{L}(E)$, p est une projection vecorielle si et seulement si $p = p \circ p$.*

On a alors $E = \mathrm{Imp} \oplus \mathrm{ker\,p}$ avec $\mathrm{Imp} = \mathrm{ker(p - id)}$ et p est la projection vectorielle sur Imp parallèlement à $\ker p$.

5.5.3 Symétries vectorielles

Définition 10

Soit E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E, $E = E_1 \oplus E_2$

Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, $\forall \vec{x} \in E_1$, $u_1(\vec{x}) = \vec{x}$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$, $\forall \vec{x} \in E_2$, $u_2(\vec{x}) = \vec{-x}$

On appelle symétrie vectorielle sur E_1 parallèlement à E_2 l'unique endomorphisme s de E dont les restrictions à E_1 et E_2 sont respectivement u_1 et u_2
$\forall \vec{x} \in E$ avec $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$, $(\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E_1 \times E_2$, on a : $s(\vec{x}) = \vec{x_1} - \vec{x_2}$
$E_1 = \ker(s - Id)$ et $E_2 = \ker(s + Id)$

Théorème 2 *Soit $s \in \mathcal{L}(E)$, s est une symétrie vectorielle si et seulement si $s \circ s = Id$.*

On a alors $E = \ker(s - Id) \oplus \ker(s + Id)$, s est la symétrie vectorielle sur $\ker(s - Id)$ parallèlement à $\ker(s + Id)$.

5.5.4 Affinités vectorielles

Définition 11

Soit E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E, $E = E_1 \oplus E_2$ et $a \in \mathbf{K}$.

Soit $u_1 \in \mathcal{L}(E_1)$, $\forall \vec{x} \in E_1$, $u_1(\vec{x}) = \vec{x}$ et $u_2 \in \mathcal{L}(E_2)$, $\forall \vec{x} \in E_2$, $u_2(\vec{x}) = a\vec{x}$

On appelle affinité vectorielle sur E_1 parallèlement à E_2 de rapport a, l'unique endomorphisme f de E dont les restrictions à E_1 et E_2 sont respectivement u_1 et u_2
$\forall \vec{x} \in E$ avec $\vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}$, $(\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in E_1 \times E_2$, on a : $f(\vec{x}) = \vec{x_1} + a\vec{x_2}$
$E_1 = \ker(f - Id)$ et $E_2 = \ker(f - aId)$

6 Documents connexes

- espaces vectoriels
- espaces vectoriels de dimension finie