Espaces vectoriels et applications linéaires en dimension finie

premières notions

Ce document n'est pas un cours mais présente seulement quelques notions à connaître sur le sujet.
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbf{K}$ espace vectoriel où $\mathbf{K}$ désigne un corps de caractéristique nulle.

1 Systèmes générateurs

1.1 Définition

Définition 1
On dit que la famille $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ *de* p *vecteurs de* E *est génératrice dans* E *si et seulement si* $\forall \vec{u} \in E, \exists (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbf{K}^p / \ \vec{u} = \sum_{k=1}^{p} x_k \vec{u}_k$. *On dit aussi que* S *est un système générateur de* E

1.2 Propriétés

- $\mathbf{P_1}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de E ssi $E = vect < \vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p >$.
- $\mathbf{P_2}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de E ssi $\forall \vec{u} \in E$ le système $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u} \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbf{K}^p \end{array} \right.$ possède au moins une solution.
- $\mathbf{P_3}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de E ssi $\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^p & \to & E \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) & \mapsto & \alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p \end{array}$ est surjective.
- $\mathbf{P_4}$: Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille génératrice de E est une famille génératrice de E.
  Si $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_p)$ est une famille génératrice de E et $(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ est une famille de E telle que $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_p\} \subset \{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ alors $(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ est une famille génératrice de E.

2 Systèmes libres

2.1 Définition

Définition 2 *On dit que la famille* $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ *de* p *vecteurs de* E *est libre dans* E *si et seulement si* $\forall (x_1, \cdots, x_p) \in \mathbf{K}^p$, $\sum_{k=1}^{p} x_k \vec{u}_k = \vec{0} \implies x_1 = \cdots, x_p = 0$. *On dit aussi que* S *est un système libre de* E.
Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite liée.

2.2 Propriétés

- $\mathbf{P_1}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est libre si et seulement si $\forall (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbf{K}^p, \forall (\beta_1, \cdots, \beta_p) \in \mathbf{K}^p$, $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{u}_k = \sum_{k=1}^{p} \beta_k \vec{u}_k \Longrightarrow \forall k \in \{1, \cdots, p\},\ \alpha_k = \beta_k$
- $\mathbf{P_2}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est libre si et seulement si $\forall \vec{u} \in E$ le système $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u} \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbf{K}^p \end{array} \right.$ admet au plus une solution.
- $\mathbf{P_3}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est libre si et seulement si $\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^p & \to & E \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) & \mapsto & \alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p \end{array}$ est injective.
- $\mathbf{P_4}$: Soit $\vec{u}_1 \in E$, $S = (\vec{u}_1)$ est libre si et seulement si $\vec{u}_1 \neq 0$. $(\vec{0})$ est lié.
- $\mathbf{P_5}$: $S = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est liée si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbf{K}$, $\vec{u}_1 = \lambda \cdot \vec{u}_2$ ou $\vec{u}_2 = \lambda \cdot \vec{u}_1$

- $\mathbf{P_6}$: $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est liée si et seulement si il existe au moins un vecteur de S combinaison linéaire des autres vecteurs de S
- $\mathbf{P_7}$: Soit $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ une famille libre et $\vec{u} \in E$.
  $(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p, \vec{u})$ est libre si et seulement si $\vec{u} \notin vect < \vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p >$.
- $\mathbf{P_8}$: Toute famille de vecteurs extraite d'une famille libre est libre
- $\mathbf{P_9}$: Toute famille de vecteurs contenant une famille liée est liée.
- $\mathbf{P_{10}}$: Toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.

3 Bases

3.1 Définition

Définition 3 *On dit que la famille $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ de p vecteurs de E est une base de E si et seulement si S est libre et génératrice dans E.*

Exemple 1 *$(\vec{e}_k)_{1\leq k\leq n}$ où $\vec{e}_k = (\delta_{i,k})_{1\leq i\leq n}$ avec $\delta_{i,k} = 0$ pour $i \neq k$ et $\delta_{k,k} = 1$, est une base de $\mathbf{K}^n$, on l'appelle la base canonique de $\mathbf{K}^n$.*

Théorème 1 *Soit $B = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ une famille de n vecteurs de E.*
B est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$.
$\forall \vec{u} \in E, \exists!(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{K}^n /\ \vec{u} = x_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + x_n \cdot \vec{u}_n$, $(x_1, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base B.

3.2 Propriétés

- $\mathbf{P_1}$: $S := (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ est une base de E si et seulement si $\forall \vec{u} \in E$ le système $\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u} \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n \end{array} \right.$ admet exactement une solution.
- $\mathbf{P_2}$: $S := (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ est une base de E si et seulement si $\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \to & E \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) & \mapsto & \alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{u}_n \end{array}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.
- $\mathbf{P_3}$: Si $B := (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n)$ est une base de E alors toute famille extraite de B est libre et toute famille de vecteurs contenant les vecteurs de B est génératrice.

4 Espaces vectoriels de dimension finie

4.1 Dimension finie

Définition 4 *On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie sur K si et seulement si E admet une famille génératrice finie.*
E est de dimension finie si et seulement si $\exists(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p) \in E^p$ tel que $E = vect < \vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p >$

Exemple 2 *$(\mathbf{K}^n, +, \cdot)$ est de dimension finie.*

Théorème 2 *Tout espace vectoriel $E \neq \{\vec{0}\}$ et de dimension finie admet au moins une base.*

par convention : $\{\vec{0}\}$ est de dimension finie et admet pour base $\emptyset$

Théorème 3 (théorème de la dimension) *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases possèdent le même nombre d'éléments. Ce nombre est la dimension de E.*

Par convention $\{\vec{0}\}$ a pour dimension 0. On appelle droite vectorielle tout espace vectoriel de dimension 1 et plan vectoriel tout espace vectoriel de dimension 2.

Théorème 4 *E est de dimension n si et seulement si il existe un isomorphisme de $\mathbf{K}^n$ sur E.*

Proposition 1
Si $(E_1, +, \cdot)$ et $(E_2, +, \cdot)$ sont deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels de dimension finie
Alors $E_1 \times E_2$ est de dimension finie et $\dim E_1 \times E_2 = \dim E_1 + \dim E_2$

4.2 Familles libres et génératrices en dimension n

Théorème 5 *Si $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est un système générateur de E alors S contient une base de E.*

Conséquence : $p \geq n$ où $n = \dim E$ et si $p = n$ alors S est une base de E

Théorème 6 (théorème de la base incomplète) *Si $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est un système libre de E alors il existe une base de E qui contient S.*

Conséquence : $p \leq n$ où $n = \dim E$ et si $p = n$ alors S est une base de E

Théorème 7 *Si $S = (\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p)$ est une famille de p vecteurs de E on a l'équivalence entre les trois proppiétés suivantes :*

1. *S est une base de E*
2. *S est générateur de E et $p = n$*
3. *S est libre dans E et $p = n$*

4.3 Sous espaces vectoriels

Proposition 2 *Soit F un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E. On a :*

1. *F est de dimension finie et* $\dim F \leq \dim E$
2. *E=F si et seulement si* $\dim E = \dim F$

5 Sous-espaces supplémentaires

Théorème 8
Hypothèses

- *Soit E un **K** espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$*
- *Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E*
- *Soit $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ une base de E_1*
- *Soit $\mathcal{B}_2 = (\vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_{p+r})$ une base de E_2*
- *On note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p, \ldots, \vec{e}_{p+r})$.*

Conclusions

- *$E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est libre dans E.*
- *$E = E_1 + E_2$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est un système générateur de E.*
- *$E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de E.*

Théorème 9 *Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.*
F et G sont supplémentaires si et seulement si

1. $F \cap G = \{\vec{0}\}$
2. $\dim E = \dim F + \dim G$

Théorème 10 *Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.*
F et G sont supplémentaires si et seulement si

1. $E = F + G$
2. $\dim E = \dim F + \dim G$

Théorème 11
Si E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E alors F admet au moins un supplémentaire dans E.

Remarque 1 *Si* $\dim E \geq 2$ *et* $0 < \dim F < \dim E$ *Alors F possède une infinité de supplémentaires.*

Définition 5 *Soit E un **K** espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E, on appelle* **codimension** *de F la dimension d'un supplémentaire de F, on la note* $\mathrm{codim} F$ *et on a :*
$\mathrm{codim} F = \dim E - \dim F$.

Théorème 12 *Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, on a :*
$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$

Théorème 13 *Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E.*
$F \cap G = \{\vec{0}\}$ *si et seulement si* $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$

6 Applications linéaires

6.1 Combinaisons linéaires

Proposition 3 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p$ p vecteurs de E, on a :*
l'image d'une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p$ est une combinaison linéaire des vecteurs $f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_p)$. Plus précisément : $\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbf{K}^p, \quad f(x_1\vec{u}_1 + \ldots + x_p\vec{u}_p) = x_1 f(\vec{u}_1) + \ldots + x_p f(\vec{u}_p)$.

Proposition 4 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$, on suppose que $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ est un système générateur de E, on a :*

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect} < f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_p) >$$

Théorème 14
Si

- *E est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$*
- *F est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel*
- *$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E*
- *$\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est un système de n vecteurs de F*

Alors

- *Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(\vec{e}_k) = \vec{u}_k$*

de plus :

1. *f est un isomorphisme, $f \in \mathcal{GL}(E,F)$ si et seulement si $\mathcal{S}$ est une base de F*
2. *f est injective si et seulement si $\mathcal{S}$ est un système libre de F*
3. *f est surjective si et seulement si $\mathcal{S}$ est un système générateur de F*

Théorème 15 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$*
- **Si** *f est un isomorphisme* **Alors** $\dim E = \dim F$
- **Si** *f est injective* **Alors** $\dim E \leq \dim F$
- **Si** *f est surjective* **Alors** $\dim E \geq \dim F$

Ces deux théorèmes s'appliquent en particulier pour $E = \mathbf{K}^n$ rapporté à sa base canonique. On a alors :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \to & F \\ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(\vec{x}) = x_1\vec{u}_1 + \cdots + x_n\vec{u}_n \end{array}$$

Théorème 16
Si *E et F sont deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels de dimension finie avec* $\dim E = \dim F$ *et $f \in \mathcal{L}(E,F)$*
Alors *les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective*   2. *f est surjective*   3. *f est bijective*

en particulier pour $E = F$ soit :

Théorème 17
Si *E est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$*
Alors *les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est injective*   2. *f est surjective*   3. *f est bijective*

6.2 Rang

6.2.1 Rang d'un système de vecteurs

Définition 6 *Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel et $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \ldots, u_p)$ un système de p vecteurs de E.*
On appelle rang du système de vecteur $\mathcal{S}$ la dimension de $\mathrm{Vect} < \vec{u}_1, \ldots, u_p >$*, on note :*

$$\mathrm{rg}(\mathcal{S}) = \dim \mathrm{Vect} < \vec{u}_1, \ldots, u_p > \ \textit{ou}\ \mathrm{rang}(\mathcal{S}) = \dim \mathrm{Vect} < \vec{u}_1, \ldots, u_p >$$

.

Proposition 5 *Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel et $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \ldots, u_p)$ un système de p vecteurs de E. Le rang du système $\mathcal{S}$ est le nombre maximal de vecteurs extraits de $\mathcal{S}$ qui forme un système libre.*

Proposition 6 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$ espace vectoriel, on suppose qu'il existe un isomorphisme f d'espace vectoriel de E sur F, $f \in \mathcal{GL}(E,F)$, $\mathcal{S}$ est un système de p vecteurs de E*
On a $\operatorname{rang} f(\mathcal{S}) = \operatorname{rang} \mathcal{S}$

6.2.2 Rang d'une application linéaire

Définition 7 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
On appelle rang de f la dimension de $\mathrm{Im} f$*, on note* $\mathrm{rg} f = \dim \mathrm{Im} f$ *ou* $\mathrm{rang} f = \dim \mathrm{Im} f$

Remarque 2 *Pour définir le rang d'une application linéaire il suffit que E soit de dimension finie.*

Proposition 7 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E, on a :* $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_n))$

Remarque 3 *Si $\mathcal{G} = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ est un système générateur de E, on a aussi* $\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}(f(\vec{u}_1), \ldots, f(\vec{u}_p))$

Proposition 8 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$.*
f est surjective si et seulement si $\mathrm{rg} f = \dim F$

Proposition 9 *Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$.*
f est un automorphisme si et seulement si $\mathrm{rg} f = \dim E$

Proposition 10 *Soit E, F et G trois $\mathbf{K}$ espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ on a :*
- **Si** *g est un isomorphisme d'espace vectoriel, $g \in \mathcal{GL}(F,G)$* **Alors** $\mathrm{rg}\, g \circ f = \mathrm{rg}\, f$
- **Si** *f est un isomorphisme d'espace vectoriel, $f \in \mathcal{GL}(E,F)$* **Alors** $\mathrm{rg}\, g \circ f = \mathrm{rg}\, g$

6.3 Théorème du rang

Théorème 18
Si
- *E et F sont deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels avec E de dimension finie*
- *$f \in \mathcal{L}(E,F)$*
- *E_1 est un supplémentaire de* $\ker f$, $\quad E = \ker f \oplus E_1$

Alors

$$\bar{f} : \begin{array}{ccc} E_1 & \to & \mathrm{Im} f \\ \vec{x} & \mapsto & \bar{f}(\vec{x}) = f(\vec{x}) \end{array}$$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Théorème 19 (théorème du rang)
Si
- *E et F sont deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels de dimension finie*
- *$f \in \mathcal{L}(E,F)$*

Alors
- $\dim E = \dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f$

6.3.1 Formes linéaires

Définition 8 *Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbf{K}$, on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$*

Proposition 11 *Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E, l'application :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \to & E^* \\ (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & \varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{K} \\ \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n & \mapsto & a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \end{array} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Conséquence :

Proposition 12
Si *E est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel de dimension finie n* **Alors** *E^* est de dimension finie et* $\dim E^* = \dim E$.

Proposition 13
Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E, on note pour $k \in [\![1, n]\!]$, φ_k la forme linéaire définie par $\forall \vec{u} \in E$, $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$, $\quad \varphi_k(\vec{u}) = x_k$, φ_k est la k-ième forme linéaire coordonnée relativement à la base $\mathcal{B}$. On a :
$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de E^*.

7 Espace vectoriel produit

7.1 Définition

Proposition 14
Soit $(E_1, +, \cdot)$ et $(E_2, +, \cdot)$ deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels, on considère $E = E_1 \times E_2$ muni des deux lois :
- $\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$, $\forall (\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in E_1 \times E_2$ *on pose* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
- $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$ *on pose* $\lambda \cdot (\vec{x}_1, \vec{x}_2) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)$

$(E_1 \times E_2, +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel appelé espace vectoriel produit.

Remarque 4 *Si $E_1, \ldots, E_p$ sont p $\mathbf{K}$ espaces vectoriels on définit aussi l'espace vectoriel produit : $E_1 \times \cdots \times E_p$ avec les deux lois :*
$\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$, $\forall (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$
$(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) + (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1, \ldots, \vec{u}_p + \vec{v}_p)$
$\lambda(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p) = (\lambda \vec{u}_1, \ldots, \lambda \vec{u}_p)$

7.2 Dimension finie

Proposition 15
Si $(E_1, +, \cdot)$ *et* $(E_2, +, \cdot)$ *sont deux* $\mathbf{K}$ *espaces vectoriels de dimension finie*
Alors $(E_1 \times E_2, +, \cdot)$ *est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel de dimension finie et* $\dim E_1 \times E_2 = \dim E_1 + \dim E_2$.

Remarque 5
Si $E_1, \ldots, E_p$ sont p $\mathbf{K}$ espaces vectoriels de dimension finie Alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $\dim E_1 \times \cdots \times E_p = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$

8 Matrices d'une application linéaire

8.1 Matrice des coordonnées d'un vecteur

Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.

Définition 9 *Pour $\vec{u} \in E$, $\quad \vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + \ldots + x_n \vec{e}_n$ avec $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, on appelle vecteur colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}$ le tableau à n lignes et une colonne : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et on écrit : $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

On note $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K})$ l'ensemble des tableaux à n lignes et une colonne d'éléments de $\mathbf{K}$.
Un élément de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K})$ est une matrice à n lignes et une colonne à cœfficients dans $\mathbf{K}$.

8.2 Matrice d'une forme linéaire

Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.

Définition 10 *Soit $\varphi \in E^*$ on appelle matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ le tableau à une ligne et n colonnes*

$$A = (\varphi(\vec{e}_1), \ldots, \varphi(\vec{e}_n))$$

et on note $\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K})$ l'ensemble des tableaux d'éléments de $\mathbf{K}$ à 1 ligne et n colonnes. Un élément de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K})$ est une matrice à cœfficients dans $\mathbf{K}$ à 1 ligne et n colonnes.

Un élément de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K})$ peut s'identifier à un élément de $\mathbf{K}^n$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension n

Proposition 16 *L'application :*

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K}) & \to & E^* \\ (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto & \varphi \text{ avec } \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n,\ \varphi(x_1\vec{e_1} + \ldots + x_n\vec{e_n}) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel

8.3 Matrice d'une application linéaire

Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.

Soit F un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m)$ une base de F.
On note $\mathcal{M}_{m\,n}(\mathbf{K})$ l'ensemble des tableaux d'éléments de $\mathbf{K}$ à m lignes et n colonnes. On dit qu'un élément de $\mathcal{M}_{m\,n}(\mathbf{K})$ est une matrice à m lignes, n colonnes à cœfficients dans $\mathbf{K}$.

Pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\vec{x} \in E$, $\quad f(\vec{x}) = f_1(\vec{x})\vec{u}_1 + \ldots + f_m(\vec{x})\vec{u}_m$, avec $\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbf{K})$ le vecteur colonne des coordonnées de $f(\vec{x})$ dans la base $\mathcal{B}_2$. $\forall i \in [\![1, m]\!],\ f_i \in E^*$, $(f_1, \ldots, f_m)$ sont les formes linéaires composantes de l'application linéaire f.

Proposition 17

- *L'application :* $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & (E^*)^m \\ f & \mapsto & (f_1, \ldots, f_m) \end{array}$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*
- $\mathcal{L}(E,F)$ *est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel de dimension finie et* $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Définition 11 *Soit* $f \in \mathcal{L}(E,F)$, *on appelle matrice de* f *dans les bases* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *la matrice* $M = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ *de* $\mathcal{M}_{m\,n}(\mathbf{K})$ *avec* $\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(\vec{e}_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\vec{u}_i$

On note pour $j \in [\![1, n]\!]$, C_j la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice M et pour $i \in [\![1, m]\!]$, L_i la $i^{\text{ième}}$ ligne de la matrice M.

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad L_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \text{ on notera aussi } M = (C_1, \ldots, C_n) \text{ ou } M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$$

Remarque 6

- *Pour* $j \in [\![1, n]\!]$, C_j *est le vecteur colonne des coordonnées de* $f(\vec{e}_j)$ *dans la base* $\mathcal{B}_2$ *de* F
- *Pour* $i \in [\![1, m]\!]$, L_i *est la matrice de la forme linéaire composante* f_i *dans la base* $\mathcal{B}_1$ *de* E

8.4 Ensemble des matrices

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $\mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à cœfficients dans $\mathbf{K}$.

Opérations sur les matrices

Somme
$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K})^2, A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}, B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ $\ A + B = C$ avec $C = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}},\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Multiplication externe
$\forall (\lambda, A) \in \mathbf{K} \times \mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K}), \quad \lambda \cdot A = C$ avec $\forall (i,j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!],\ c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$

Produit de matrices
Si $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbf{K})$ on définit le produit $A \times B = P$ par $P = (p_{ij})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le r}}$ avec

$\forall (i,j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, r]\!],\ p_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{q} a_{ik}b_{kj}$

Remarque 7 *Si* $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix}$ *et* $B = (C_1, \ldots, C_r)$ *alors* $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,r]\!],\ p_{ij} = L_i C_j$

Proposition 18
$(\mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K}), +, \cdot)$ *est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel de dimension* mn

Si pour $(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$ on note $E_{ij} = (e_{kl})_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le l \le n}}$ la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K})$ définie par $e_{kl} = 0$ si $(k,l) \neq (i,j)$ et $e_{ij} = 1$, $(E_{ij})_{(i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]}$ est une base, appelée la base canonique de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K})$.

Proposition 19
Soit E, F, G *trois* $\mathbf{K}$ *espaces vectoriels de dimension finie,* $\dim E = p, \dim F = q,\ \dim G = r$*,* E *rapporté à une base* $\mathcal{B}_1$*,* F *à une base* $\mathcal{B}_2$ *et* G *à une base* $\mathcal{B}_3$*. Soit* $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *de matrice* A *dans les bases* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *et* $g \in \mathcal{L}(F,G)$ *dans les bases* $\mathcal{B}_2$ *et* $\mathcal{B}_3$*.*
On a :
$g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ *et* $g \circ f$ *a pour matrice* $B \times A$ *dans les bases* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_3$*.*

Proposition 20
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \times, \cdot)$ *est une* $\mathbf{K}$ *algèbre (non commutative pour* $n \geq 2$*)*

8.5 Trace d'une application linéaire

Définition 12 (Trace d'une matrice)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$*, on considère l'espace vectoriel* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$*, pour* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$*,* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ *on définit la trace de* A *par* $\mathrm{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Proposition 21 tr *est une forme linéaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\quad \mathrm{tr} \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^*$

Proposition 22 $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Proposition 23 *Deux matrices semblables ont même trace*

conséquence :
On peut définir la trace d'un endomorphisme

Définition 13
Soit E *un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathcal{L}(E)$*, on appelle trace de* f *la trace d'une matrice de* f *dans une base de* E

D'après la proposition précédente cette définition ne dépend pas de la base de E choisie.

Proposition 24 *La trace d'un projecteur est égale à son rang.*
C'est à dire que si E *est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel de dimension finie et* $p \in \mathcal{L}(E)$ *est un projecteur alors* $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rang} p$

9 Documents connexes

- espaces vectoriels premières notions
- espaces vectoriels