

Entiers Dénombrément

1 Entiers naturels

1.1 Relation d'ordre

Définition 1 Soit E un ensemble non vide et \mathcal{R} une relation binaire sur E , R est une relation d'ordre si et seulement si

1. Pour tout élément x de E , x est en relation avec x , on note : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$ (on dit que la relation \mathcal{R} est réflexive).
2. $\forall (x, y) \in E^2; x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$ (on dit que la relation est antisymétrique).
3. $\forall (x, y, z) \in E^3, x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$ (on dit que la relation est transitive).

Si de plus :

- $\forall (x, y) \in E^2$ $x\mathcal{R}y$ ou $x\mathcal{R}y$ (deux éléments quelconques sont comparables)
On dit que l'ordre est total, si l'ordre n'est pas total on dit que c'est un ordre partiel

Une relation d'ordre \mathcal{R} se note souvent \leq ou \geq , si E est un ensemble muni d'une relation d'ordre \leq on dit que (E, \leq) est un ensemble ordonné, si l'ordre est total on dit que c'est un ensemble totalement ordonné sinon on dit que c'est un ensemble partiellement ordonné.

Si $x \leq y$ avec $x \neq y$ on note aussi $x < y$, mais la relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur E car elle n'est pas réflexive.

Exemple 1

1. (\mathbb{R}, \leq) avec $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+$, (\mathbb{R}, \leq) est un ensemble totalement ordonné.
2. Soit E un ensemble non-vide contenant au moins deux éléments, on considère l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ constitué des parties de E muni de l'inclusion, $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un ensemble partiellement ordonné.
3. Soit $E = C^0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . On muni E de la relation binaire \leq définie par $\forall (f, g) \in E^2, f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$. (E, \leq) est un ensemble partiellement ordonné.

Définition 2 Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et $A \subset E, a \in E$.

- a est un majorant de A si et seulement si $\forall x \in A, x \leq a$
- a est un minorant de A si et seulement si $\forall x \in A, a \leq x$
- a est le plus grand élément de A si et seulement si $a \in A$ et $\forall x \in A, x \leq a$, on note alors $a = \max(A)$
- a est le plus petit élément de A si et seulement si $a \in A$ et $\forall x \in A, a \leq x$, on note alors $a = \min(A)$
- a est la borne supérieure de A si et seulement si a est le plus petit des majorants de A , on note alors $a = \sup(A)$
- a est la borne inférieure de A si et seulement si a est le plus grand des minorants de A , on note alors $a = \inf(A)$

Remarque 1

- Les majorants, minorants, plus grand élément, plus petit élément, borne supérieure, borne inférieure n'existent pas toujours.
- Il peut y avoir une infinité de majorants, de minorants, par contre si le plus grand élément, le plus petit élément, la borne supérieure, la borne inférieure d'une partie A de E existe alors celui-ci ou celle-ci est unique.
- Si A possède un plus grand (respectivement plus petit) élément celui-ci est aussi la borne supérieure (respectivement inférieure) de A .
- Un plus grand élément ou une borne supérieure (respectivement plus petit élément ou borne inférieure) est un majorant (respectivement minorant).
- Si A n'a pas de majorant (respectivement de minorant) alors A n'admet pas de plus grand élément ni de borne supérieure (respectivement de plus petit élément ni de borne inférieure).

Exemple 2

- $E = \mathbb{N}$ muni de la relation d'ordre usuelle. A est le sous-ensemble des entiers impairs, $A = \{n \in \mathbb{N} | \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p + 1\}$. A n'a pas de majorant, donc A n'a pas de borne supérieure. A possède deux minorants 0 et 1, 1 est le plus petit élément de A et donc 1 est aussi la borne inférieure de A .

MP

- $E = \mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuelle. On considère l'intervalle de \mathbb{R} , $A_1 =]-\pi, 3]$ et la partie de \mathbb{R} , $A_2 = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$.
 1. A_1 possède une infinité de minorants et de majorants, les minorants sont les éléments de l'intervalle de \mathbb{R} , $] -\infty, -\pi]$, les majorants sont les éléments de l'intervalle $[3, +\infty[$, le plus grand élément de A_1 est 3, c'est donc aussi la borne supérieure de A_1 , A_1 n'a pas de plus petit élément, par contre il admet $-\pi$ pour borne inférieure.
 2. A_2 possède une infinité de minorants et de majorants, les minorants sont les éléments de l'intervalle de \mathbb{R} , $] -\infty, -\sqrt{2}]$, les majorants sont les éléments de l'intervalle $[\sqrt{2}, +\infty[$, A_2 n'a pas de plus grand élément par contre il admet $\sqrt{2}$ pour borne supérieure, A_2 n'a pas de plus petit élément, il admet $-\sqrt{2}$ pour borne inférieure. On peut remarquer que $A_2 \subset \mathbb{Q}$ et que dans \mathbb{Q} muni de sa relation d'ordre usuelle A_2 est majoré mais n'admet pas de borne supérieure dans \mathbb{Q} de même il est minoré mais n'a pas de borne inférieure.
- Soit E un ensemble non-vide, on considère l'ensemble ordonné $(\mathcal{P}(E), \subset)$, $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ et la partie de $\mathcal{P}(E)$, $\Omega = \{A, B\}$.
 - Soit $F \in \mathcal{P}(E)$, F est un majorant de Ω si et seulement si $A \cup B \subset F$
 - Soit $F \in \mathcal{P}(E)$, F est un minorant de Ω si et seulement si $F \subset A \cap B$
 - $A \cup B$ est la borne supérieure de Ω et $A \cap B$ est la borne inférieure de Ω .
 - Ω admet un plus grand, (plus petit) élément si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$

1.2 Nombres entiers naturels

1.2.1 Propriétés fondamentales de l'ensemble \mathbb{N} des nombres entiers naturels

L'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels est un ensemble ordonné qui vérifie les propriétés fondamentales suivantes :

A_1 : Toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément.

A_2 : \mathbb{N} n'a pas de plus grand élément.

A_3 : Toute partie non vide et majorée de \mathbb{N} possède un plus grand élément.

Une des premières conséquences de ces propriétés est que la relation d'ordre de \mathbb{N} est un ordre total. Elles permettent aussi de démontrer le principe de récurrence énoncé dans le paragraphe suivant et de construire l'addition et la multiplication de \mathbb{N} et de retrouver les propriétés classiques de ces opérations que nous supposons acquises dans la suite.

1.2.2 Récurrence

Théorème 1 soit A une partie de non vide de \mathbb{N}

Si $0 \in A$ et si $\forall n \in \mathbb{N}$ l'implication $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$ est vraie

Alors $A = \mathbb{N}$

Ce théorème est souvent utilisé sous l'une des des deux formes suivantes :

Principe de récurrence simple Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui dépend d'un entier n

Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie (**initialisation**) et

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a l'implication $\mathcal{P}(n)$ Vraie $\Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$ Vraie (**hérédité**).

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Principe de récurrence avec prédécesseurs Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété qui dépend d'un entier n

Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, on a l'implication $(\forall k \leq n, \mathcal{P}(k)$ Vraie) $\Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$ Vraie .

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 3 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

On énonce d'abord la propriété à démontrer par récurrence : $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

initialisation : pour $n = 0$ on a $\sum_{k=0}^0 k^3 = 0 = \left(\frac{0(0+1)}{2}\right)^2$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie

hérédité : Pour $n \in \mathbb{N}$ supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, au rang $n + 1$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2 \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \text{ de sorte que } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie. On a montré : } \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \end{aligned}$$

MP

Conclusion : On a montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Exemple 4 On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$
montrer que la suite est définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n$.

Montrons par récurrence la propriété : $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : u_n$ est défini et $u_n = 3^n$.

Utilisons une récurrence avec prédécesseurs, en fait la récurrence porte sur deux termes consécutifs de sorte que l'initialisation doit porter sur les deux premiers termes.

initialisation : D'après la définition de la suite, u_0 et u_1 , existent, sont uniques et $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

hérédité : Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ on suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie pour $0 \leq k \leq n$, au rang $n + 1$ on a :

$n \geq 1$ et $n - 1 \geq 0$, d'après l'hypothèse de récurrence u_n et u_{n-1} sont déterminés de manière unique de plus $u_{n+1} = 4u_n - 3u_{n-1}$ de sorte que u_{n+1} existe et est déterminé de manière unique, en outre : $u_{n+1} = 4.3^n - 3.3^{n-1} = (4 - 1).3^n = 3^{n+1}$ par suite $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

conclusion : On a montré par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

1.2.3 Suites

Soit E un ensemble non-vidé

Définition 3 On appelle suite d'éléments de E , une famille d'éléments de E indexée par \mathbb{N} ou une partie de \mathbb{N} , c'est à dire qu'une suite est une application de \mathbb{N} dans E ou d'une partie de \mathbb{N} dans E , on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou

$$\mathbb{N} \rightarrow E \quad I \rightarrow E$$

$(u_n)_{n \in I}$ où I est une partie de \mathbb{N} l'application : $n \mapsto u(n)$ ou $n \mapsto u(n)$

• Suites définies par récurrence :

Si f est une application de E dans E et $a \in E$, le principe de récurrence permet de montrer que les relations :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ définissent une unique suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

De même si $(a, b) \in \mathbb{K}^2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} les relations :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, u_1 = \beta \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases} \text{ définissent une unique suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

1.3 Ensembles finis

1.3.1 Définition

On notera dans la suite $\llbracket 1, n \rrbracket = \{k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq n\}$

Définition 4

Un ensemble E est fini

si et seulement si E est vide ou il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E .

Un ensemble qui n'est pas fini est appelé un ensemble infini.

Proposition 1 $(p, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, s'il existe une bijection de $\llbracket 1, p \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ alors $p = n$

Conséquence :

Proposition 2

Si E est un ensemble fini non-vidé et $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il existe une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur E , alors n est unique.

n est appelé le cardinal de E , on note $n = \text{card}(E)$

On convient que l'ensemble vide a pour cardinal 0, $\text{card}(\emptyset) = 0$.

1.3.2 Propriétés

P₁ Si E un ensemble fini et E' une partie de $E, E' \subset E$ Alors E' est un ensemble fini et $\text{card}(E') \leq \text{card}(E)$ de plus $\text{card}(E') = \text{card}(E)$ si et seulement si $E = E'$.

P₂ Si E et F sont deux ensembles avec E fini et il existe une bijection de E sur F Alors F est un ensemble fini et $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

Ceci montre qu'un ensemble fini ne peut pas être en bijection avec une de ces parties strictes.

MP

P₃ Si A et B sont deux ensembles disjoints Alors $A \cup B$ est fini et : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

P₄ Si A est une partie d'une ensemble fini E Alors $\text{card}(C_E A) = \text{card}E - \text{card}A$.

P₅ Si $(A_k)_{1 \leq k \leq p}$ est une famille de p ensembles finis deux à deux disjoints Alors $\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^p A_k\right) = \sum_{k=1}^p \text{card}A_k$.

P₆ Si A et B sont deux ensembles finis alors $A \cup B$ est un ensemble fini et $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$

P₇ Si E et F sont deux ensembles finis alors $E \times F$ est fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}E \cdot \text{card}F$.

P₈ Si E est un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$ alors E^p est une ensemble fini et $\text{card}(E^p) = (\text{card}E)^p$.

Proposition 3 Si E et F sont deux ensembles finis et f une application de E dans F Alors

1. $\text{card}f(E) \leq \text{card}E$
2. f est injective si et seulement si $\text{card}f(E) = \text{card}E$
3. f est surjective si et seulement si $\text{card}f(E) = \text{card}F$
4. Si $\text{card}E = \text{card}F$ Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
 - (a) f est bijective
 - (b) f est injective
 - (c) f est surjective

Proposition 4 Une partie non vide P de \mathbb{N} est finie si et seulement si elle est majorée.

Proposition 5 Si P est finie et non vide Alors il existe une bijection strictement croissante et une seule de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur P où $n = \text{card}(P)$.

2 Dénombrément

2.1 Applications

2.1.1 Nombre de p-listes d'un ensemble fini

Soit F un ensemble fini à n éléments et $p \in \mathbb{N}$

Définition 5

On appelle p -liste d'éléments de F un élément de F^p , ce qui correspond aussi à une suite à p éléments de F .

Proposition 6 Le nombre de p -listes d'éléments de F est $n^p = (\text{card}F)^p$

2.1.2 Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Soit E et F deux ensembles finis non-vides de cardinaux respectifs p et n .

L'ensembles des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Une application f de E dans F peut-être identifié à la famille $(x_i)_{i \in E} \in F^E$ d'éléments de F indexée par l'ensemble E , avec $\forall i \in E, x_i = f(i)$, de sorte que l'ensemble des applications de E dans F se note aussi F^E .

Proposition 7

Si $E = \{a_1, \dots, a_p\}$, l'application $\varphi : \begin{cases} F^E & \rightarrow & F^p \\ f & \mapsto & (f(a_1), \dots, f(a_p)) \end{cases}$ est une bijection.

Proposition 8

Si $\text{card}E = p$ et $\text{card}F = n$ Alors $\text{card}\mathcal{F}(E, F) = (\text{card}F)^{\text{card}E}$ soit $\text{card}\mathcal{F}(E, F) = n^p$.

Conséquence :

Proposition 9 Si $\text{card}E = p$ Alors $\text{card}\mathcal{P}(E) = 2^p$

MP

2.1.3 Nombre d'injections

Soit E et F deux ensembles finis non-vides de cardinaux respectifs p et n .

Une injection de E dans F correspond à la donnée d'une p -liste de F d'éléments distincts deux à deux, c'est à dire que l'application φ de 7 induit une bijection de l'ensemble des injections de E dans F sur l'ensemble des p -listes d'éléments de F distincts deux à deux.

Proposition 10

Si $\text{card}E = p$ et $\text{card}F = n$ Alors le nombre d'injections de E dans F est $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$
En particulier ce nombre est nul si $p > n$

2.1.4 Nombre de bijections

Définition 6 On appelle permutation d'un ensemble E non vide une bijection de E sur E , on notera $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E .

Proposition 11 Si E est un ensemble non vide de cardinal n Alors le nombre de permutation de E est : $n! = n \times (n-1) \times \dots \times 1$.

$n!$: se lit «factorielle n »

On convient que $0! = 1$

2.2 Combinaisons

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier, on appelle combinaison de E de p éléments choisis parmi n une partie de E à p éléments. Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n éléments d'un ensemble E ne dépend que de n et p , il ne dépend pas de E on le note $\binom{n}{p}$, on trouve aussi la notation C_n^p à la place de $\binom{n}{p}$.

Proposition 12 Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$, le nombre de parties de E à p éléments est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad \text{si } 0 \leq p \leq n, \quad \binom{n}{p} = 0 \quad \text{si } p > n$$
$$\text{soit } \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} \quad \text{si } p \geq 1$$

2.2.1 Propriétés

$$\mathbf{P}_1 \quad \forall 0 \leq p \leq n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\mathbf{P}_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$$

$$\mathbf{P}_3 \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \quad (\text{formule du triangle de Pascal}).$$

2.2.2 Formule du binôme de Newton

Proposition 13

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Plus généralement : si $(A, +, \cdot)$ est un anneau, $(a, b) \in A^2$ avec $\boxed{a \cdot b = b \cdot a}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$