DERIVATION

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 DERIVABILITE

1.1 Définitions

Soit f une fonction numérique définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$,

Définition 1 *f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et appartient à $\mathbb{R}$*

On a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Définition 2 *f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 (on note $\mathbf{DL_1}(x_0)$) si et seulement si $\exists A \in \mathbb{R}$, $\forall h$ tq $x_0 + h \in I \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h)$*

Proposition 1 *f est dérivable en x_0 si et seulement si f admet un $\mathbf{DL_1}(x_0)$ et on a alors $f'(x_0) = A$ soit $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + o(h)$.*

Définition 3 *f est dérivable à droite en x_0 (resp. à gauche) si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$)*

On note : $f_d'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ (resp. : $f_g'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$)

Proposition 2 *f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f_d'(x_0) = f_g'(x_0)$*

Définition 4 *f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point de I, $\begin{array}{rl} f' : & I \to \mathbb{R} \\ & x \to f'(x) \end{array}$ est la fonction dérivée de f.*

Proposition 3 *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

! la réciproque est fausse. $x \to \sqrt{x}$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

1.2 Interprétation géométrique

Tangente : Si f est dérivable en x_0 Alors la courbe représentative de f admet au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ une tangente qui a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Si f est dérivable en x_0 à droite (resp. à gauche), la courbe de f admet une demi-tangente de pente $f_d'(x_0)$ (resp. $f_g'(x_0)$).

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mp\infty$, la courbe de f admet une tangente ≪ *verticale* ≫ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$

1.3 Propriétés de la dérivée

1.3.1 Opérations :

Si f et g sont dérivables en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g$, λf, $f \cdot g$ sont dérivables en x_0, si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0.

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- $(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$
- $(fg)^{'}(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{'}(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

1.3.2 Composée :

Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$.

1.3.3 Réciproque :

Si $f : I \to f(I)$ est continue, bijective et dérivable en x_0
Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$
$\left(f^{-1}\right)^{'}(y_0) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

2 THEOREMES

Proposition 4 *Si f, dérivable en x_0 avec f définie sur un intervalle ouvert contenant x_0, admet un extrémum local en x_0 Alors $f'(x_0) = 0$.*

Cette proposition donne une condition nécessaire d'existence d'un extrémum dans le cas où f est définie à droite et à gauche de x_0. L'étude de la fonction au voisinage de x_0 indiquera s'il s'agit bien d'un extrémum. Il est d'usage de préciser la proposition de la façon suivante :

Proposition 5 *Soit f, dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0. f admet un extrémum local en x_0 si et seulement si la dérivée s'annule en changeant de signe en x_0.*

Proposition 6 *Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle I.
f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si sa dérivée est positive (resp. négative) ou nulle sur I*

Remarque 1 *Soit $A = \{x \in I, f'(x) = 0\}$, la croissance (resp. décroissance) dans la proposition précédente est stricte sur I si et seulement si A ne contient pas d'intervalle de longueur non-nulle.*

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$:

Théorème 1 (de Rolle)
Si
- *f est définie et continue sur $[a, b]$*
- *f est dérivable sur $]a, b[$*
- *$f(a) = f(b)$*

Alors *Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$*

Théorème 2 (des Accroissements Finis)
Si
- *f est définie et continue sur $[a, b]$*
- *$f$est dérivable sur $]a, b[$*

Alors *Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$*

Théorème 3 (-Inégalités des accroissements finis)
Si
- *f est définie et continue sur $[a,b]$*
- *f est dérivable sur $]a,b[$*
- *$\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a,b],\ |f'(x)| \leq M$*

Alors
$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

Théorème 4 (de prolongement)
Si *f est dérivable sur $]a,b[$ et f' admet une limite finie au point a*
Alors *f se prolonge par continuité en a et le prolongement est dérivable avec $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$*

3 DERIVEES D'ORDRE SUPERIEUR

Si f est n fois dérivable sur l'intervalle I, $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n^{e} de f, $f^{(2)} = f" = (f')'$, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Définition 5
- *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I si et seulement si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.*
- *f est de classe C^0 sur I si et seulement si f est continue sur I.*
- *f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si et seulement si f est indéfiniment dérivable sur I.*

Théorème 5
Si
- *f est définie et continue sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$ sur $]a,b]$*
- *$f^{(p)}$ admet une limite finie en a*

Alors
f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a,b]$.

propriétés :
- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$ ou $n = +\infty$) sur I, $\lambda \in \mathbb{R}$
  Alors $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$ et $\dfrac{f}{g}$ (si $g \neq 0$) sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
- Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$ ou $n = +\infty$) sur I à valeurs dans J et g est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J
  Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
- Si f est bijective , de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$ ou $n = +\infty$) sur I à valeurs dans J et $f' \neq 0$ sur I
  alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J.

Formule de Leibniz $(f \cdot g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$.

Formule de Taylor avec reste intégral :
Soit f de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}$ sur I, $\forall (a,b) \in I^2$, $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(t)\mathtt{dt}$

Formule de Taylor avec reste de Lagrange :
Soit f (n+1) fois dérivable sur I, $\forall (a,b) \in I^2$ $\exists c \in]a,b[$, tel que :
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Inégalité de Taylor Lagrange
Soit f $(n+1)$ fois dérivable sur I avec $\forall x \in I$, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$, on a :
$$\forall (a,b) \in I^2 \left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(a) \right| \leq M \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

4 FONCTIONS CONVEXES

Définition 6 *Soit f définie sur l'intervalle I, f est convexe sur I si et seulement si*
$\forall (x,y) \in I^2$, $\forall t \in [0,1] \quad f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$.

Interprétation géométrique : f est convexe si et seulement si pour tout couple de points (M,N) de la courbe représentative de f la corde $[M,N]$ est au ≪ *au dessus* ≫ de l'arc (MN) de la courbe.

Définition 7 *f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.*

Proposition 7 *Soit f convexe sur I, $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in I^n$, $f\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$*

Proposition 8
- *Soit f dérivable sur I : f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I (la courbe de f est au dessus de chacune de ses tangentes).*
- *Si f est deux fois dérivable sur I : f est convexe sur I si et seulement si $f" \geq 0$ sur I.*