Nombres réels et nombres complexes

Ce document n'est pas un cours mais présente seulement quelques notions à connaître sur le sujet.

1 Propriétés de $\mathbb{R}$

1.1 Définitions

$(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné, c'est à dire que la relation d'ordre est compatible avec les opérations, elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $a \leq b$ et $c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c \leq b + c$
2. $a \geq 0$ et $b \geq 0 \ \Rightarrow \ a.b \geq 0$

Pour une partie non vide $\mathbf{A}$ de $\mathbb{R}$ on a les définitions suivantes :

- $\mathbf{A}$ est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{A}$, $x \leq M$
  on dit alors que $\mathbf{A}$ est majorée et que M est un majorant de $\mathbf{A}$.
- $\mathbf{A}$ est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{A}$, $x \geq m$
  on dit alors que $\mathbf{A}$ est minorée et que m est un minorant de $\mathbf{A}$.
- $\mathbf{A}$ est bornée si $\mathbf{A}$ majorée et minorée ce qui est équivalent à dire qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbf{A} \subset [m, M]$.
- $\mathbf{A}$ admet un plus grand élément s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que
  1. $M \in \mathbf{A}$
  2. M est un majorant de $\mathbf{A}$

  On note $M = \max(\mathbf{A})$
- $\mathbf{A}$ admet un plus petit élément s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que
  1. $m \in \mathbf{A}$
  2. m est un minorant de $\mathbf{A}$

  On note $m = \min(\mathbf{A})$
- On appelle borne supérieure de $\mathbf{A}$, si elle existe, le plus petit des majorants de $\mathbf{A}$, on note $\sup(\mathbf{A})$ cette borne supérieure.
- On appelle borne inférieure de $\mathbf{A}$, si elle existe, le plus grand des minorants de $\mathbf{A}$, on note $\inf(\mathbf{A})$ cette borne inférieure.

1.2 Propriétés

1. Dans $\mathbb{R}$ on a alors le résultat fondamental suivant :

   Théorème 1
   – *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*
   – *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

   On dit que $\mathbb{R}$ vérifie l'axiome de la borne supérieure.

   On peut d'ailleurs définir $\mathbb{R}$ comme étant un corps totalement ordonné vérifiant l'axiome de la borne supérieure. Ceci définit $\mathbb{R}$ à un isomorphisme près.
2. Autres propriétés
   - Lorsqu'ils existent $\sup(\mathbf{A}), \inf(\mathbf{A}), \max(\mathbf{A}), \min(\mathbf{A})$ sont uniques.
   - Lorsque $\max(A)$ existe alors $\sup(\mathbf{A}) = \max(A)$ et lorsque $\min(A)$ existe alors $\inf(\mathbf{A}) = \min(A)$
   - Lorsque $\mathbf{A}$ est majorée alors $[\sup(\mathbf{A}), +\infty[$ est l'ensemble des majorants de $\mathbf{A}$
   - Lorsque $\mathbf{A}$ est minorée alors $]-\infty, \inf(\mathbf{A})]$ est l'ensemble des minorants de $\mathbf{A}$
3. **Partie entière :**

   Proposition 1 *Pour tout nombre réel x il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$*

   Définition 1 *Cet unique entier n s'appelle la partie entière de x et se note $E(x)$ ou $[x]$*

   Propriété 1 $\forall x \in \mathbb{R}$
   ⋆ $E(x) \leq x < E(x) + 1$
   ⋆ $\forall k \in \mathbb{Z}$, $E(x + k) = E(x) + k$
   ⋆ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $E(x + y) \geq E(x) + E(y)$

2 Propriétés de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}=\{a+ib,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\},\quad i^2=-1$

2.1 Forme algébrique

Soit $z\in\mathbb{C}$, $\exists!(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ z=a+ib$, c'est la forme algébrique de z, a est la partie réelle de z et b est la partie imaginaire de z, on note $a=\mathrm{Re}(z)$ et $b=\mathrm{Im}(z)$, pour deux nombres complexes $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ on a alors :

Egalité : $z=z'\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z)=\mathrm{Im}(z)'$

Somme : $z+z'=(a+a')+i(b+b')$

Produit : $z\cdot z'=(aa'-bb')+i(ab'+ba')$

Inverse : Pour $z\neq 0$, $\dfrac{1}{z}=\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$

Conjuqué : On appelle conjugué de z le complexe $\bar z=a-ib$

Propriétés : $\overline{z+z'}=\bar z+\bar z'$, $\quad\overline{z\cdot z'}=\bar z\cdot\bar z'$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar z}$, $\quad\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar z}{\bar z'}$

Module : On appelle module de z le réel positif $|\ z\ |=\sqrt{a^2+b^2}$

Propriétés :

$|\ z+z'\ |\leq|\ z\ |+|\ z'\ |$, $\quad |\ z\cdot z'\ |=|\ z\ |\cdot|\ z'\ |$, $\quad \left|\ \dfrac{z}{z'}\ \right|=\dfrac{|\ z\ |}{|\ z'\ |}\,(z'\neq 0)$, $\quad |\ z^n\ |=|\ z\ |^n\ (n\in\mathbb{Z},\ z\neq 0)$

$|\ z\ |^2=z\cdot\bar z$, $\quad |\ \mathrm{Re}z\ |\leq|\ z\ |$, $\quad |\ \mathrm{Im}z\ |\leq|\ z\ |$

2.2 Forme trigonométrique

Soit $z\in\mathbb{C}^*$, $\exists!(\rho,\theta)\in]0,+\infty[\times]-\pi,+\pi]$, $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ et on a : $\rho=|\ z\ |$, $\cos\theta=\dfrac{\mathrm{Re}z}{|\ z\ |}$, $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{Im}z}{|\ z\ |}$

Notation exponentielle : $z=\rho e^{i\theta}$

l'argument de z est l'angle de mesure θ et θ est la mesure principale de cet argument ($\theta\in]-\pi,+\pi]$)

Si $z=\rho(\cos\theta'+i\sin\theta')$ Alors $\exists k\in\mathbb{Z},\ \theta'=\theta+2k\pi$, on note $\theta'\equiv\theta[2\pi]$ et on note aussi souvent Arg(z) l'argument de z et $arg(z)$ une mesure de cet angle, on dit aussi que $arg(z)$ est un argument de z.

2.2.1 Propriétés :

Pour $(z,z')\in\mathbb{C}^{*2}$

- $\mathrm{Arg}(z\cdot z')=\mathrm{Arg}(z)+\mathrm{Arg}(z')$, $\quad \mathrm{Arg}(\dfrac{z}{z'})=\mathrm{Arg}(z)-\mathrm{Arg}(z')$
- $(\rho e^{i\theta})(\rho' e^{i\theta'})=\rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$, $\quad\overline{\rho e^{i\theta}}=\rho e^{-i\theta}$, $\quad\dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}}=\dfrac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta-\theta')}$
- $z=z'\Leftrightarrow |z|=|z'|$ et $\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arg}z'$

2.2.2 Formule de Moivre :

$\forall(n,\theta)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{R},\quad \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$ soit $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

Exemple d'utilisation :

Pour $(n,\theta)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, $\cos(n\theta)=\mathrm{Re}(\cos\theta+i\sin\theta)^n$, en développant on détermine un polynôme $P_n\in\mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\cos(n\theta)=P_n(\cos\theta)$

2.2.3 Formules d'Euler :

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\ \text{ et }\ \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Exemple d'utilisation [linéarisation] :

On développe $\cos^n\theta=\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$ ou $\sin^n\theta=\left(\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$ ce qui permet de déterminer des réels (a_k), (b_k)

ou (c_k) tels que $\cos^n\theta = \sum_{k=0}^{n} a_k\cos(k\theta)$, $\sin^n\theta = \sum_{k=1}^{n} b_k\cos(k\theta)$ (pour n pair) ou $\sin^n\theta = \sum_{k=1}^{n} c_k\sin(k\theta)$ (pour n impair) et d'une manière générale on peut linéariser $\cos^p\theta\sin^q\theta$, par exemple pour déterminer une primitive.

2.2.4 Racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité :

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ l'équation $z^n=1$ possède n solutions dans $\mathbb{C}$, $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k\in\{1,\dots,n-1\}$ ce sont les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Propriétés : Pour $k\in\mathbb{Z}$ posons $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ on a :

• $w_{k+n}=w_k$ • $w_k\cdot w_{k'} = w_{k+k'}$ • $w_n = w_0 = 1$ • $\sum_{k=0}^{n-1} w_k = 0$ • pour $p\in\mathbb{Z}\setminus n\mathbb{Z}$ $\sum_{k=0}^{n-1}(w_k)^p = 0$

racines cubiques de l'unité : $1,\ j,\ j^2$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ propriétés : $j^3=1$, $j^2=\bar{j}$, $1+j+j^2=0$

2.2.5 Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe :

Un nombre complexe non-nul possède n racines $n^{\text{ième}}$, on obtient ces racines en multipliant l'une d'elle par les racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Si $w=\rho e^{i\theta}$, $z^n = w$ a pour solutions dans $\mathbb{C}$, $z_k = \sqrt[n]{\rho}\cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ $k\in\{0,\dots,n-1\}$

2.2.6 Racines carrées d'un nombre complexe :

Un nombre complexe W non-nul admet deux racines carrées δ et $-\delta$

• Forme trigonométrique : si $W=\rho e^{i\theta}$ alors $\delta = \sqrt{\rho}\cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$

• Forme algébrique : si $W=a+ib$ alors $\delta = x+iy$ avec (x,y) solution du système $\begin{cases} x^2-y^2=a \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \\ xy\cdot b\geq 0\end{cases}$

2.2.7 Equation du $2^{\text{ième}}$ degré : $az^2+bz+c=0$ $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$, $a\neq 0$

Résolution : On calcule le discriminant $\Delta = b^2-4ac$ soit alors δ une racine carrée de Δ les solutions sont alors :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

3 Sommes et Produits

$\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ des éléments de $\mathbb{K}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, on a les propriétés suivantes :

Somme : • $\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{n}x_i + \sum_{i=1}^{n}y_i$ • $\sum_{i=1}^{n}\lambda x_i = \lambda\sum_{i=1}^{n}x_i$ • $\sum_{i=1}^{n}\lambda = n\lambda$

Produit : • $\prod_{i=1}^{n}(x_i.y_i) = \prod_{i=1}^{n}x_i\cdot\prod_{i=1}^{n}y_i$ • $\prod_{i=1}^{n}(\lambda\cdot x_i) = \lambda^n\prod_{i=1}^{n}x_i$ • $\prod_{i=1}^{n}\lambda = \lambda^n$

Interversion de somme :

• Soit $(x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ des éléments de $\mathbb{K}$, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}x_{ij} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}$ ($n.p$ termes)

• Soit $(x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ des éléments de $\mathbb{K}$, $\sum_{1\leq i\leq j\leq n}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}x_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}x_{ij}$ ($\frac{n(n+1)}{2}$ termes)

Carré d'une somme de termes : Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ n éléments de $\mathbb{K}$: $\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j$

Quelques sommes :

$$\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n}k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx) = \mathrm{Re}\left((1+e^{ix})^n\right) \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx) = \mathrm{Im}\left((1+e^{ix})^n\right)$$

4 Trigonométrie

4.1 Tableau de valeurs

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	0	$\times$

4.2 Formules usuelles

x est un réel. Dans les formules suivantes il faut s'assurer que les nombres sont bien définis (en particulier faire attention à tan)

Parité :	$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$	$\tan(-x) = -\tan x$	
Périodicité :	$\cos(x+2\pi) = \cos x$	$\sin(x+2\pi) = \sin x$	$\tan(x+\pi) = \tan x$	
	$\cos(x+\pi) = -\cos x$	$\sin(x+\pi) = -\sin x$		
	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\tan(\pi - x) = -\tan x$	
	$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$	$\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$	
	$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$	$\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$	
	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$	
	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$	$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$	$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
On pose $t = \tan \frac{x}{2}$	$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$	$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$	

4.3 Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
$\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$	$\cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$	
$\sin p + \sin q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$	$\sin p - \sin q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$	
$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$	$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$	
$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$		