Corrigé d'exercice

—

Intégration

—

L'exercice suivant donne un exemple de fonction positive continue sur $[0,+\infty[$ intégrable sur $[0,+\infty[$ et non bornée. En particulier la fonction ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

Enoncé

Pour quelles valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$ $\dfrac{x^2}{1+x^m(\sin x)^2} \in \mathcal{L}^1([0,+\infty[)$?

Solution

Pour $m \in \mathbb{R}$ et $x \in]0,+\infty[$, posons $f_m(x) = \dfrac{x^2}{1+x^m \sin^2 x}$, on a f_m est définie et continue sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $f_m(x) > 0$, pour $m \leqslant 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty$ de sorte que $\dfrac{x^2}{1+x^m(\sin x)^2} \notin \mathcal{L}^1([0,+\infty[)$, dans la suite nous supperons $m > 0$, f_m se prolonge alors par continuité en 0 en posant $f_m(0) = 0$.

Comme f est positive, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^m \sin^2 x}\mathtt{dx} \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi} \frac{x^2}{1+x^m \sin^2 x}\mathtt{dx} \in \mathbb{R}$

Soit si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge où $\displaystyle u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x^2}{1+x^m \sin^2 x}\mathtt{dx}$.

On a : pour $n \geqslant 1$,

En posant : $x = n\pi + u$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle u_n = \int_0^{\pi} \frac{(n\pi+u)^2}{1+(n\pi+u)^m \sin^2 u}\mathtt{du}$

Soit $\displaystyle u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(n\pi+u)^2}{1+(n\pi+u)^m \sin^2 u}\mathtt{du} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(n\pi+u)^2}{1+(n\pi+u)^m \sin^2 u}\mathtt{du}$

En posant : $v = \pi - u$ il vient :

$\displaystyle u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(n\pi+u)^2}{1+(n\pi+u)^m \sin^2 u}\mathtt{du} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{((n+1)\pi-v)^2}{1+((n+1)\pi-v)^m \sin^2 v}\mathtt{dv}$

On utilise alors l'encadrement suivant : $\forall u \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}u \leq \sin u \leq u$ ce qui permet de montrer l'encadrement :

$$(n\pi)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+(n+1)^m\pi^m u^2}\mathtt{du} \leq u_n \leq 2(n+1)^2\pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+n^m\pi^m \frac{4}{\pi^2}u^2}\mathtt{du}$$

On a : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+k^2u^2}\mathtt{du} = \frac{1}{k}\arctan(\frac{\pi}{2}k)$ avec $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\arctan(\frac{\pi}{2}k) = \frac{\pi}{2}$ de sorte que les termes généraux des séries mojorante et minorante ont un équivalent en $+\infty$ de la forme $\dfrac{cte}{n^{\frac{m}{2}-2}}$.

On en déduit que la fonction $\dfrac{x^2}{1+x^m(\sin x)^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $m > 6$.