Corrigé d'exercice

—

Intégration

—

Enoncé

Montrer que $\int_0^{+\infty} \dfrac{t}{e^t - 1}\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$

Solution

Posons pour $t \in]0, +\infty[$, $\varphi(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$, φ est alors une fonction définie et continue sur $I =]0, +\infty[$.

$(\star)$: Pour $t > 0$, $\varphi(t) = \dfrac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} te^{(n+1)t} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}$.

On veut appliquer le théorème du programme d'intégration terme à terme des séries de fonctions.

Rappelons ce théorème :

Théorème 1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$*
Si

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathcal{L}^1(I)$*
2. *$\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I et a pour somme une fonction S continue par morceaux sur I*
3. *$\sum\limits_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ converge*

Alors

$$S \in \mathcal{L}^1(I) \text{ et } \int_0^{+\infty} S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$$

Ici :

1. Posons $\forall n \geq 1,\ f_n(t) = te^{-nt}$, on a
   - $\forall n \geq 1$ f_n est continue sur $[0, +\infty[$
   - En $+\infty$ $f_n(t) = o(\dfrac{1}{t^2})$ avec $\dfrac{1}{t^2} \in \mathcal{L}^1([1, +\infty[)$ de sorte que $f_n \in \mathcal{L}^1(]0, +\infty[)$
2. D'après $(\star)$ $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et a pour somme φ, $\varphi(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$ qui est une fonction continue sur $]0, +\infty[$
3. $\forall n \geq 1$, une intégration par parties donne (les fonctions étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$)
   $f_n \geq 0$, $\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x te^{-nt}\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\left[-\dfrac{t}{n}e^{-nt} \right]_0^x + \dfrac{1}{n}\int_0^x e^{-nt}\mathrm{d}t \right) = \dfrac{1}{n^2}$
   Avec $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, d'où :

$$\varphi \in \mathcal{L}^1(]0, +\infty[) \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$$