Surfaces

Quelques éléments sur les surfaces :

Soit E l'espace affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et de direction $\vec{E}$. E et $\vec{E}$ seront identifiés tous les deux à $\mathbb{R}^3$.

1 Définitions

Définition 1 *On appelle nappe paramétrée de classe $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N}$ ou $p = +\infty$ tout couple $(\mathcal{S}) = (U,\varphi)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^p$ sur U à valeurs dans E.*

On appelle support $(\mathcal{S})^*$ de la nappe paramétrée $(\mathcal{S}) = (U,\varphi)$ l'image dans E de l'application φ, $(\mathcal{S})^* = \varphi(U)$. D'une manière générale on appelle surface paramétrée la réunion des supports d'une ou plusieurs nappes paramétrées dont les ouverts de définition sont disjoints.

Définition 2 *Deux nappes paramétrées $(\mathcal{S}_1) = (U_1,\varphi_1)$ et $(\mathcal{S}_2) = (U_2,\varphi_2)$ de classe $\mathcal{C}^p$ sont $\mathcal{C}^p$ équivalentes s'il existe un $\mathcal{C}^p$ difféomorphisme $\theta : \begin{array}{ccc} U_1 & \to & U_2 \\ (u,v) & \to & \theta(u,v) \end{array}$ de U_1 sur U_2 tel que $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \theta$.*
On dit que (U_1,φ_1) et (U_2,φ_2) sont des paramétrages admissibles de la nappe.
Les nappes paramétrées $\mathcal{C}^p$ équivalentes définissent une nappe géométrique de classe $\mathcal{C}^p$.

Rappel :

soit $\varphi : \begin{array}{ccc} U_1 & \to & U_2 \\ (u,v) & \mapsto & \theta(u,v) = (\theta_1(u,v),\theta_2(u,v)) \end{array}$ une application de classe $\mathcal{C}^p$ d'un ouvert U_1 sur un ouvert U_2 avec $p \geq 1$.

φ est un $\mathcal{C}^p$ difféomorphisme si et seulement si
- $\theta(U_1) = U_2$
- θ est injective.
- le jacobien de θ ne s'annule pas sur U_1.

Définition 3 *Soit $(\mathcal{S}) = (U,\varphi)$, $\varphi : (u,v) \mapsto \varphi(u,v)$ une nappe paramétrée, on dit que le paramétrage est un paramétrage cartésien si (u,v) sont deux des coordonnées du point courant c'est à dire que :*

$\varphi : \begin{array}{ccc} U & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & (u,v,\varphi_3(u,v)) \end{array}$ *ou* $\varphi : \begin{array}{ccc} U & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & (u,\varphi_2(u,v),v) \end{array}$ *ou* $\varphi : \begin{array}{ccc} U & \to & E \\ (u,v) & \mapsto & (\varphi_1(u,v),u,v) \end{array}$

Définition 4 *Soit $(\gamma) = (U,\varphi)$ une nappe paramétrée de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$*
Pour $(u,v) \in U$, $M(u,v) = \varphi(u,v)$ est un point régulier si et seulement si $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right)$ est libre soit si et seulement si $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \neq 0$

La notion de point régulier ne dépend pas de la paramétrisation de la nappe géométrique.

Pour un point régulier $M(u,v)$:
- Le plan de repère $(M(u,v), \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v), \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v))$ est le plan tangent à la surface en $M(u,v)$.
- $M(x,y,z)$ appartient au plan tangent en $M_0 = M(u,v)$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{M_0M}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}) = 0$.
- Le vecteur $\vec{n} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)$ est un vecteur normal à la surface en $M(u,v)$ et la droite de repère $(M(u,v),\vec{n})$ est la normale à la surface en $M(u,v)$.
- Pour un point $M(x,y,z)$ de l'espace, la distance de M au plan tangent P_T en $M_0 = M(u,v)$ est : $\mathrm{d}(M,P_T) = \dfrac{\left| < \overrightarrow{M_0M}, \vec{n} > \right|}{\| \vec{n} \|}$
- Un point qui n'est pas régulier est un point stationnaire. Les points stationnaires sont les points tels que : $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = 0$.
- Si $\forall (u,v) \in U$, $M(u,v)$ est régulier on dit que la nappe est régulière.

2 Equation cartésienne

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$.

$f(x,y,z) = 0$ est l'équation cartésienne d'une surface $(\mathcal{S})$ du plan,
$(\mathcal{S}) = \{M(x,y,z) \in E,\ (x,y,z) \in U,\ f(x,y,z) = 0\}$

Théorème 1
Si $\quad f(x_0,y_0,z_0) = 0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$
Alors au voisinage de (x_0,y_0,z_0), $(\mathcal{S})$ *admet un paramétrage cartésien, c'est à dire qu'il existe* $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $r_3 > 0$ *et un unique paramétrage cartésien* $(]x_0 - r_1, x_0 + r_1[\times]y_0 - r_2, y_0 + r_2[, \varphi)$ *de classe* $\mathcal{C}^p$*, tels que*
$]x_0 - r_1, x_0 + r_1[\times]y_0 - r_2, y_0 + r_2[\times]z_0 - r_3, z_0 + r_3[\subset U,\ \varphi(x_0,y_0) = z_0,$
$\varphi(]x_0 - r_1, x_0 + r_1[\times(]y_0 - r_2, x_0 + r_2[) \subset]z_0 - r_3, z_0 + r_3[,$
$\forall (x,y,z) \in]x_0 - r_1, x_0 + r_1[\times]y_0 - r_2, y_0 + r_2[\times]z_0 - r_3, z_0 + r_3[,\ f(x,y,z) = 0$ *si et seulement si* $z = \varphi(x,y)$
de plus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,\varphi(x,y))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))} \quad \textit{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(x,y))}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(x,y))}.$$

Propriétés :

- Si $f(x_0,y_0,z_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ Alors on a des résultats équivalents, au voisinage de (x_0,y_0,z_0) la surface admet une représentation paramétrique de la forme :
  $(y,z) \mapsto (\varphi(y,z), y, z)$ ou $(x,z) \mapsto (x, \varphi(x,z), z)$.
- Points réguliers : $M(x,y,z)$ est un point régulier si et seulement si $\text{Grad} f(x,y,z) \neq 0$,
  si $\text{Grad} f(x,y,z) = 0$ on dit que le point $M(x,y,z)$ est singulier.
- En un point régulier $M(x,y,z)$ (soit $\text{Grad} f(x,y,z) \neq 0$),
  le vecteur $\text{Grad} f(x,y,z) = (\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z))$ est un vecteur directeur de la normale à la courbe en $M(x,y,z)$.
- En un point régulier $M(x_0,y_0,z_0)$, le plan tangent admet pour équation cartésienne :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0$$

2.1 Intersection de deux surfaces

Soit $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ deux surfaces d'équations $f_1(M) = 0$ et $f_2(M)) = 0$ de classe $\mathcal{C}^p, p \geq 1$ avec $M = (x,y,z)$.
On se place en un point M_0 de l'intersection des deux surfaces $\mathcal{C} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ régulier pour $\mathcal{S}_1$ et pour $\mathcal{S}_2$ (s'il en existe).
On note P_1 et P_2 les plans tangents en M_0 à $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$.

- Lorsque $P_1 = P_2$, les surfaces ont un plan tangent commun, on dit qu'elles sont tangentes au point M_0.
- Lorsque $P_1 \neq P_2$, l'intersection des surfaces est alors une courbe $\mathcal{C}$ au voisinage de M_0 dont la tangente en M_0 est l'intersection des plans P_1 et P_2.

Plus précisément on a le théorème :

Théorème 2
Si

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(M_0)\frac{\partial f_2}{\partial z}(M_0) - \frac{\partial f_1}{\partial z}(M_0)\frac{\partial f_2}{\partial y}(M_0) \neq 0$$

Alors

Il existe une boule ouverte $\mathcal{B}$ *contenant* M_0*, un intervalle ouvert* I *contenant* x_0*, et deux fonctions* φ_1 *et* φ_2 *de* I *dans* $\mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^p$*, telles que :*

$$(x,y,z) \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{B} \Leftrightarrow x \in I,\ y = \varphi_1(x),\ z = \varphi_2(x).$$

(I, φ) *avec* $\varphi : I \to E, \varphi(x) = (x, \varphi_1(x), \varphi_2(x))$ *est une paramétrisation de la courbe* $\mathcal{C}$ *au voisinage du point* M_0 *et la droite* $\mathcal{D} = P_1 \cap P_2$ *est la tangente en* M_0 *à* $\mathcal{C}$

3 Quadriques

3.1 Définition

Définition 5 *On appelle quadrique une surface* Σ *d'équation :*
$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(Dxy + Exz + Fyx) + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + h = 0$ *(E)*
où $(A, B, C, D, E, F) \in \mathbb{R}^6$ *est non-nul et* $(\alpha, \beta, \gamma, h) \in \mathbb{R}^4$.

3.2 Réduction des équations de quadriques

On pose :

- $M = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$ M est une matrice symétrique réelle, c'est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la forme quadratique Q définie par $Q(x, y, x) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(Dxy + Exz + Fyx)$
- $L = (\alpha, \beta, \gamma)$, L est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la forme linéaire l définie par $l(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z$.
- X= $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(E) s'écrit : ${}^tXMX + 2LX + h = 0$

Comme M est symétrique il existe une matrice orthogonale P (${}^tP = P^{-1}$) et une matrice diagonale D telles que ${}^tPMP = D$ où $D = \text{diag}(\lambda, \mu, \nu)$, posons $L_1 = LP = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $X = PX_1$ avec $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

L'équation (E) devient alors :

$$(E) \Leftrightarrow \lambda x_1^2 + \mu y_1^2 + \nu z_1^2 + 2(\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1) + h = 0$$

3.3 Quadriques à centre

Si M est inversible et X_0 est défini par $X_0 = -\left(M^{-1}\right)^t L$ soit $L = -{}^tX_0 M$ Alors en prenant comme origine du repère le point de coordonnées X_0 et en posant $X' = X - X_0$ l'équation (E) devient :

$${}^tX'MX' + h_1 = 0 \text{ avec } h_1 = -{}^tX_0MX_0 + h$$

Le point de coordonnées X_0 est alors centre de symétrie de la quadrique.

Remarque 1 *Pour une quadrique d'équation :* $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(Dxy + Exz + Fyz) + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + h = 0$
Posons $F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(Dxy + Exz + Fyz) + 2(\alpha x + \beta y + \gamma z) + h$, *lorsque la matrice* M *est inversible le centre de la quadrique est l'unique point* M_0 *pour lequel* $\overrightarrow{\text{grad}} F(M_0) = \vec{0}$

Si les valeurs propres de M sont non-nulles, la quadrique est à centre et quitte à multiplier l'équation par -1 en en permutant éventuellement les rôles des coordonnées, la quadrique admet une équation réduite de la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon'$$

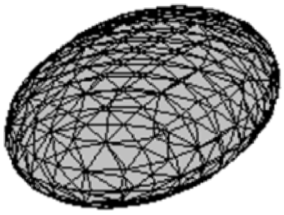
où $(a, b, c) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^3$, $(\varepsilon, \varepsilon') \in \{-1, 0, 1\}^2$

Proposition 1 *La quadrique est de révolution, c'est à dire qu'il existe un axe* D *tel que la quadrique soit invariante par toute rotation d'axe* D *si et seulement si* M *possède deux valeurs propres identiques. L'axe a alors pour vecteur directeur un vecteur propre associé à la troisième valeur propre.*

4 Classification des quadriques

4.1 Ellipsoïde

$$(E) \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

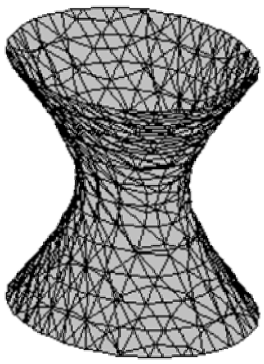


O est centre de symétrie.
C'est une quadrique de révolution autour de (Oz) si et seulement si $a=b$
C'est une sphère si et seulement si a=b=c.

$$\text{Paramétrisation : } \begin{cases} x=a\cos(u)\cos(v) \\ y=b\cos(u)\sin(v) \\ z=c\sin(u) \\ (u,v)\in[0,2\pi]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

4.2 Hyperboloïde à une nappe

$$(H_1) \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



O est centre de symétrie.
C'est une quadrique de révolution autour de (Oz) si et seulement si $a=b$

$$\text{Paramétrisation : } \begin{cases} x=a\sqrt{1+v^2}\cos(u) \\ y=b\sqrt{1+v^2}\sin(u) \\ z=cv \\ (u,v)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R} \end{cases}$$

Droite contenue dans (H_1) Posons $P=\frac{x}{a}-\frac{z}{c}$, $Q=\frac{x}{a}+\frac{z}{c}$, $R=1-\frac{y}{b}$, $S=1+\frac{y}{b}$.
Alors l'équation de (H_1) est aussi $PQ=RS$. De sorte que (H_1) contient les deux familles de droites $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}}$ et $(\Delta_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}}$ définies par les systèmes d'équations cartésiennes suivants :

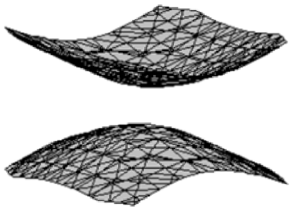
$$\lambda\in\mathbb{R},\ D_\lambda \begin{cases} R=\lambda P \\ Q=\lambda S \end{cases} \qquad D_\infty \begin{cases} P=0 \\ S=0 \end{cases}$$

$$\lambda\in\mathbb{R},\ \Delta_\lambda \begin{cases} S=\lambda P \\ Q=\lambda R \end{cases} \qquad \Delta_\infty \begin{cases} P=0 \\ R=0 \end{cases}$$

Théorème 3 (génération par une famille de droites) *Par tout point de* (H_1) *passe une et une seule droite* (D_λ) *et une une et une seule droite* (Δ_λ) *ce sont les seules droites contenues dans* (H_1).

4.3 Hyperboloïde à deux nappes

$$(H_2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

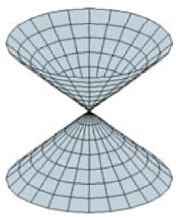


O est centre de symétrie.
C'est une quadrique de révolution autour de (Oz) si et seulement si $a = b$

$$\text{Paramétrisation : } \begin{cases} x = a\cos(u)\sinh(v) \\ y = b\sin(u)\sinh(v) \\ z = \pm c\cosh(v) \\ (u,v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \end{cases}$$

4.4 Cône

$$(\mathcal{C}) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

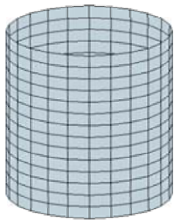


O est centre de symétrie .
C'est un cône de sommet O, il est de révolution autour de (Oz) si et seulement si $a = b$

$$\text{Paramétrisation : } \begin{cases} x = av\cos(u) \\ y = bv\sin(u) \\ z = cv \\ (u,v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \end{cases}$$

4.5 Cylindre elliptique

$$(\mathcal{CE}) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

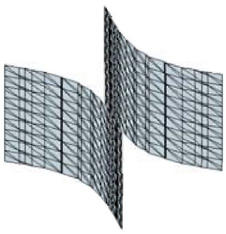


C'est un cylindre elliptique de direction (Oz) (les sections droites sont des ellipses), il est de révolution autour de (Oz) si et seulement si $a = b$.

$$\text{Paramétrisation : } \begin{cases} x = a\cos(u) \\ y = b\sin(u) \\ z = v \\ (u,v) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \end{cases}$$

4.6 Cylindre hyperbolique

$$(\mathcal{CH}) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

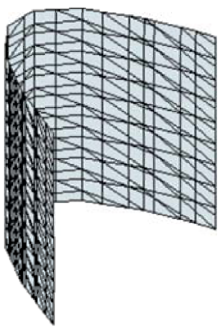


C'est un cylindre hyperbolique de direction (Oz) (les sections droites sont des hyperboles).

$$\text{Paramétrisation : } \begin{cases} x = \pm a\cosh(u) \\ y = b\sinh(u) \\ z = v \\ (u,v)\mathbb{R} \times \mathbb{R} \end{cases}$$

4.7 Cylindre parabolique

$$(\mathcal{CP}) \quad x^2 = ay$$

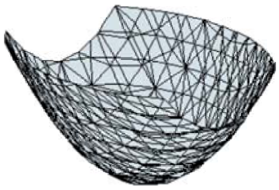


C'est un cylindre parabolique de direction (Oz) (les sections droites sont des paraboles).

$$\text{Paramétrisation : } \begin{cases} x = \pm a\cosh(u) \\ y = b\sinh(u) \\ z = v \\ (u,v)\mathbb{R}\times\mathbb{R} \end{cases}$$

4.8 Paraboloïde Elliptique

$$(\mathcal{PE}) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

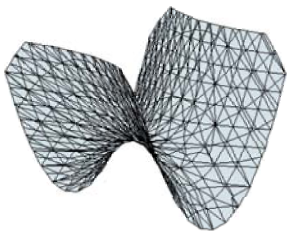


C'est un paraboloïde elliptique, (les sections par des plans parallèles à (xOy) sont vides ou des ellipses), il est de révolution autour de (Oz) si et seulement si $a = b$.

Paramétrisation :
On a déjà une paramétrisation cartésienne, le paraboloïde est paramétré par (x,y) et $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

4.9 Paraboloïde Hyperbolique

$$(\mathcal{PH}) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$



C'est un paraboloïde hyperbolique, (les sections par des plans parallèles à (xOy) sont des hyperboles).

Paramétrisation :
On a déjà une paramétrisation cartésienne, le paraboloïde est paramétré par (x,y) et $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

Droite contenue dans $(\mathcal{PH})$:

Posons, $P = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$, $Q = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, (D_λ) la droite d'équations : $\begin{cases} P = \lambda \\ z = \lambda Q \end{cases}$ et (Δ_λ) la droite d'équations : $\begin{cases} Q = \lambda \\ z = \lambda P \end{cases}$

Théorème 4 *Par tout point de $(\mathcal{PH})$ il passe une et une seule droite (D_λ) et une et une seule droite (Δ_λ), ce sont les seules droites contenues dans le paraboloïde hyperbolique.*