Suites de fonctions

à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Ce document n'est pas un cours complet, il donne un aperçu rapide des principaux résultats à connaître sur les suites de fonctions numériques.

1 Convergence des suites de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications d'un ensemble A non vide vers un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé $(F, \| \ \|_F)$ de dimension finie rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d)$ et f une application de A vers F ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1.1 Convergence simple :

Définition 1
$(f_n)_n$ converge simplement sur A vers f si $\forall x \in A, (f_n(x))_n$ converge dans F et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$
Soit : $\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \| f(x) - f_n(x) \|_F \leq \varepsilon$

1.2 Convergence uniforme

Définition 2
$(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers f si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in A,\ \| f(x) - f_n(x) \|_F \leq \varepsilon$.

Proposition 1
$(f_n)_n$ converge uniformément sur A si et seulement si
$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \sup\limits_{x\in A} \| f(x) - f_n(x) \|_F \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} \sup\limits_{x\in A} \| f(x) - f_n(x) \|_F = 0$

Proposition 2
$(f_n)_n$ converge uniformément sur A si et seulement si
$\exists (\alpha_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ *et* $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in A,\ \| f(x) - f_n(x) \|_F \leq \alpha_n$

Proposition 3
Si $(f_n)_n$ est une suite de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A, F), N_\infty)$ des fonctions définies et bornées sur A
où $\forall g \in \mathcal{B}(A, F),\ N_\infty(g) = \sup\limits_{x\in A} \| g(x) \|_F$
Alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur A si et seulement si $(f_n)_n$ converge dans $(\mathcal{B}(A, F), N_\infty)$

1.3 Convergence uniforme sur tout segment

Ici $A = I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 3
$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I si pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, $(f_n)_n$ converge uniformément f sur $[a, b]$

1.4 Propriétés

1.4.1 Convergence simple :

- Pour étudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur un ensemble A, on fixe x quelconque dans A et on étudie alors la convergence de la suite numérique $(f_n(x))_n$, on utilise alors les résultats sur les suites numériques.
- L'ensemble sur lequel la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement est l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.
- **Proposition 4**
  Une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur A vers f dans F si et seulement si les suites de fonctions composantes dans la base $\mathcal{B}$ convergent simplement sur A dans $\mathbb{K}$ respectivement vers les fonctions composantes de f dans $\mathcal{B}$.

1.4.2 Convergence uniforme

- Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur A Alors $(f_n)_n$ converge simplement sur A.
- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A si et seulement si
$$\left\{\begin{array}{l}(f_n)_n \text{ converge simplement vers f sur } A\\ (R_n)_n \text{ converge uniformément vers 0 sur } A \text{ avec } R_n(x)=f(x)-f_n(x).\\ (\text{C'est à dire : } \exists n_0\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in A} \parallel R_n(x)\parallel_F \in\mathbb{R} \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{\substack{x\in A\\ n\geqslant n_0}} \parallel R_n(x)\parallel_F = 0)\end{array}\right.$$
- $(f_n)_n$ converge uniformément sur A si et seulement si
$$\left\{\begin{array}{l}(f_n)_n \text{ converge simplement vers f sur } A\\ \exists(\alpha_n)_n,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0,\ \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ tels que } \forall n\geq n_{0,}\ \forall x\in A,\ \parallel f(x)-f_n(x)\parallel_F\leq\alpha_n.\end{array}\right.$$
- **Proposition 5**
Une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers f dans F si et seulement si les suites de fonctions composantes dans la base $\mathcal{B}$ convergent uniformément sur A dans $\mathbb{K}$ respectivement vers les fonctions composantes de f dans $\mathcal{B}$.
- Soit $B\subset A$ et $C\subset A$
  - Si $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur A Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur B
  - Si $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur B et sur C Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $B\cup C$
  Attention si $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur tout ensemble $A_i,\ i\in I$ d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de A, on ne peut pas dire que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\underset{i\in I}{\cup}A_i$
  Par exemple : $A=[0,1[,\ \mathbb{K}=\mathbb{R},\ F=\mathbb{R},\ I=[0,1[$, posons $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0,1[,\ f_n(x)=x^n,\ f(x)=0$, pour $i\in I,\ A_i=[0,i]$. On a $\forall i\in I,\ (f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A_i mais $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1[=\underset{i\in I}{\cup}A_i$
- **Propriété de Cauchy uniforme :**
  - **Définition 4** *La suite de fonction $(f_n)_n$ vérifie la propriété de cauchy uniforme sur A si* $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\ n\geq N$ *et* $p\in\mathbb{N}\Rightarrow\forall x\in A,\ \parallel f_{n+p}(x)-f_n(x)\parallel_F\leq\varepsilon$
  - **Proposition 6** *$(f_n)_n$ vérifie la propriété de Cauchy uniforme sur A si et seulement si* $\exists(\alpha_n)_n\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0,$ *et* $\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geq N,\forall p\in\mathbb{N},\ \forall x\in A,\ \parallel f_{n+p}(x)-f_n(x)\parallel_F\leq\alpha_n$
  - **Théorème 1**
  $(f_n)_n$ converge uniformément sur A si et seulement si $(f_n)_n$ vérifie la propriété de cauchy uniforme sur A

2 Propriétés pour les suites de fonctions uniformément convergentes

$(F,\parallel\ \parallel_F)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie.

2.1 Suites bornées

Soit A un ensemble non vide et $(f_n)_n$ une suite d'applications de A dans F et f une application de A dans F.

Théorème 2
Si

1. *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A*
2. *$\forall n,\ f_n$ est bornée sur A, $\forall n,\ \exists M_n>0,\ \forall x\in A,\ \parallel f_n(x)\parallel_F\leq M_n$*

Alors
- *f est bornée sur A*
- *$(f_n)_n$ et f sont uniformément bornées sur A,*
c'est à dire que $\{f_n,\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{f\}$ est une partie bornée de $(\mathcal{B}(A,F),N_\infty)$ ou encore qu'il existe $M>0$ tel que $\forall n,\ \forall x\in A,\ \parallel f_n(x)\parallel_F\leq M,\ \parallel f(x)\parallel_F\leq M$

2.2 Limites

Dans ce paragraphe A est une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_E)$ de dimension finie et a est adhérent à A, $a \in \overline{A}$ ou A est un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \in A$ ou a est une extrémité de A éventuellement infinie ou $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$

Théorème 3
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = l_n,\ l_n \in F$
2. $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* A

Alors

1. $(l_n)_n$ *converge dans* F
2. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} l_n$ *soit* $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_n(x)$.

2.3 Continuité

Dans ce paragraphe A est une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_E)$ de dimension finie et $(f_n)_n$ une suite d'applications de A dans F, f une application de A dans F

Théorème 4 *Soit* $a \in A$
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ *est continue en* a
2. $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* A

Alors $f = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n$ *est continue en* a.

Théorème 5
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ *est continue sur* A
2. $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* A

Alors
$f = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n$ *est continue sur* A.

2.4 Convergence en moyenne

Pour $A = [a, b]$, dans $(\mathcal{C}([a, b], F), N_1)$ où $\forall f \in \mathcal{C}([a, b], F),\ N_1(f) = \displaystyle\int_a^b \| f(t) \|_F \,\mathrm{d}t$ on a : $N_1(f) \leqslant (b-a) N_\infty(f)$

Proposition 7
Soit $(f_n)_n$ *une suite de* $\mathcal{C}([a, b], F)$
Si $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* $[a, b]$ *vers une fonction* f
Alors $f \in \mathcal{C}([a, b], F)$ *et* $(f_n)_n$ *converge vers* f *dans* $(\mathcal{C}([a, b], F), N_1)$
On dit que la suite $(f_n)_n$ *converge vers* f *en moyenne dans* $\mathcal{C}([a, b], F)$.

2.5 Intégration

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite d'applications de I dans F, f une application de I dans F

Théorème 6 *Soit* $[a, b] \subset I$
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ *est continue sur* $[a, b]$
2. $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$

Alors $\displaystyle\int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x) \mathrm{d}x$

Théorème 7
Soit a un point de I
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ *est continue sur* I
2. $(f_n)_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I *vers* f
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ h_n$ *est la primitive de* f_n *qui s'annule en* a, $\forall x \in I,\ h_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$

Alors

1. $(h_n)_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I *vers une fonction* h
2. h *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I*, c'est la primitive de* f *sur* I *qui s'annule en* a*.*

$$\forall x \in I,\ h(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

2.6 Dérivabilité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite d'applications de I dans F, f une application de I dans F

Théorème 8
Si

1. $\forall n,\ f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I
2. $(f_n)_n$ *converge simplement vers* f *sur* I
3. $(f'_n)_n$ *converge uniformément vers une fonction* g *sur tout segment de* I

Alors

1. f *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* I*.*
2. $f' = g$ *soit* $\forall x \in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x)$
3. $(f_n)_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I

On a aussi :

Théorème 9
Si

1. $\forall n,\ f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* I *(*$p \in \mathbb{N}^*$*)*
2. $\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ (f_n^{(k)})_n$ *converge simplement vers une fonction* g_k *sur* I
3. $(f_n^{(p)})_n$ *converge uniformément vers une fonction* g_p *sur tout segment de* I

Alors

1. g_0 *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* I*.*
2. $\forall k \in [\![1, p]\!],\ g_0^{(k)} = g_k$
3. $\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ (f_n^{(k)})_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I

Souvent dans la pratique on utilise :

Théorème 10
Si

1. $\forall n,\ f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* I *(*$p \in \mathbb{N}$ *ou* $p = +\infty$*)*
2. $\forall k \in [\![0, p]\!],\ (f_n^{(k)})_n$ *converge uniformément vers une fonction* g_k *sur tout segment de* I

Alors

1. g_0 *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* I*.*
2. $\forall k \in [\![1, p]\!],\ g_0^{(k)} = g_k$