Suites de fonctions numériques

Ce document n'est pas un cours complet, il donne un aperçu rapide des principaux résultats à connaître sur les suites de fonctions numériques.

1 Convergence des suites de fonctions

Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications d'un ensemble A non vide vers $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et f une application de A vers $\mathbb{K}$.

1.1 Convergence simple :

Définition 1
$(f_n)_n$ converge simplement sur A vers f si $\forall x \in A, (f_n(x))_n$ converge dans $\mathbb{K}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$
Soit : $\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$

1.2 Convergence uniforme

Définition 2
$(f_n)_n$ converge uniformément sur A si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in A,\ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

Proposition 1
$(f_n)_n$ converge uniformément sur A si et seulement si
$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \sup\limits_{x\in A}|f(x) - f_n(x)| \in \mathbb{R}$ *et* $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ n\geq n_0}} \sup\limits_{x\in A}|f(x) - f_n(x)| = 0$

Proposition 2
$(f_n)_n$ converge uniformément sur A si et seulement si
$\exists (\alpha_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ *et* $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \forall x \in A,\ |f(x) - f_n(x)| \leq \alpha_n$

1.3 Convergence uniforme sur tout segment

Ici $A = I$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$

Définition 3
$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur tout segment de I si pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$

1.4 Propriétés

1.4.1 Convergence simple :

- Pour étudier la convergence simple de $(f_n)_n$ sur un ensemble A, on fixe x quelconque dans A et on étudie alors la convergence de la suite numérique $(f_n(x))_n$, on utilise alors les résultats sur les suites numériques.
- L'ensemble sur lequel la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement est l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

1.4.2 Convergence uniforme

- Si $(f_n)_n$ converge uniformément sur A Alors $(f_n)_n$ converge simplement sur A.
- $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A si et seulement si
$$\begin{cases} (f_n)_n \text{ converge simplement vers f sur } A \\ (R_n)_n \text{ converge uniformément vers 0 sur } A \text{ avec } R_n(x) = f(x) - f_n(x). \\ (\text{C'est à dire : } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in A}(|R_n(x)|) \in \mathbb{R} \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in A}(|R_n(x)|) = 0) \end{cases}$$
- $(f_n)_n$ converge uniformément sur A si et seulement si
$$\begin{cases} (f_n)_n \text{ converge simplement vers f sur } A \\ \exists (\alpha_n)_n,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tels que } \forall n \geq n_0, \forall x \in A,\ \mid f(x) - f_n(x) \mid \leq \alpha_n. \end{cases}$$

- Soit $B \subset A$ et $C \subset A$
  - Si $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur A Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur B
  - Si $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur B et sur C Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $B \cup C$
    Attention si $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur tout ensemble $A_i,\ i \in I$ d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de A, on ne peut pas dire que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\underset{i\in I}{\cup} A_i$

    Par exemple : $A = [0,1[,\ \mathbb{K} = \mathbb{R},\ I = [0,1[$, posons $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1[,\ f_n(x) = x^n,\ f(x) = 0$, pour $i \in I,\ A_i = [0,i]$. On a $\forall i \in I,\ (f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A_i mais $(f_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1[= \underset{i\in I}{\cup} A_i$
- **Propriété de Cauchy uniforme :**
  - **Définition 4** *La suite de fonction $(f_n)_n$ vérifie la propriété de cauchy uniforme sur A si* $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N$ *et* $p \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall x \in A,\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$
  - **Proposition 3** *$(f_n)_n$ vérifie la propriété de Cauchy uniforme sur A si et seulement si* $\exists (\alpha_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, *et* $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \alpha_n$
  - **Théorème 1**
    $(f_n)_n$ converge uniformément sur A si et seulement si $(f_n)_n$ vérifie la propriété de cauchy uniforme sur A

2 Propriétés pour les suites de fonctions uniformément convergentes

2.1 Suites bornées

Soit A un ensemble non vide et $(f_n)_n$ une suite d'applications de A dans $\mathbb{K}$ et f une application de A dans $\mathbb{K}$

Théorème 2
Si

1. *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A*
2. *$\forall n,\ f_n$ est bornée sur A, $\forall n,\ \exists M_n > 0,\ \forall x \in A,\ |f_n(x)| \leq M_n$*

Alors

- *f est bornée sur A*
- *$(f_n)_n$ et f sont uniformément bornées sur A,*
  c'est à dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall n,\ \forall x \in A,\ |f_n(x)| \leq M,\ |f(x)| \leq M$

2.2 Limites

Dans ce paragraphe A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est adhérent à A (c'est à dire que $a \in A$ ou a est une extrémité de A éventuellement infinie) ou $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$

Théorème 3
Si

1. *$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x\to a} f_n(x) = l_n,\ l_n \in \mathbb{K}$*
2. *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A*

Alors

1. *$(l_n)_n$ converge dans $\mathbb{K}$*
2. $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} l_n$ *soit* $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in A}} f_n(x)$.

2.3 Continuité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$, f une application de I dans $\mathbb{K}$

Théorème 4 *Soit $a \in I$*
Si

1. *$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est continue en a*
2. *$(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur I*

Alors $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ *est continue en a.*

Théorème 5
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ *est continue sur* I
2. $(f_n)_n$ *converge uniformément sur tout segment* $[a, b] \subset I$

Alors $f = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n$ *est continue sur* I*.*

2.4 Intégration

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$, f une application de I dans $\mathbb{K}$

Théorème 6 *Soit* $[a, b] \subset I$
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ *est continue sur* $[a, b]$
2. $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a, b]$

Alors $\displaystyle\int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\mathrm{dx} = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{dx}$

Théorème 7
Soit a *un point de* I
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ *est continue sur* I
2. $(f_n)_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I *vers* f
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ h_n$ *est la primitive de* f_n *qui s'annule en* a*,* $\forall x \in I,\ h_n(x) = \int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$

Alors

1. $(h_n)_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I *vers une fonction* h
2. h *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I*, c'est la primitive de* f *sur* I *qui s'annule en* a*.*

$$\forall x \in I,\ h(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

2.5 Dérivabilité

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{K}$, f une application de I dans $\mathbb{K}$

Théorème 8
Si

1. $\forall n,\ f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I
2. $(f_n)_n$ *converge simplement vers* f *sur* I
3. $(f_n')_n$ *converge uniformément vers une fonction* g *sur tout segment de* I

Alors

1. f *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* I*.*
2. $f' = g$ *soit* $\forall x \in I,\ \left(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n\right)'(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(x)$
3. $(f_n)_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I