Devoir libre
Formule de Stirling
(éléments de correction)

Constante d'Euler

1. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est défini et $u_n > 0$, (car : $\forall x > 0,\ \ln(1+x) < x$)
D'autre part lorsque n tend vers $+\infty$, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$ soit $u_n = O(\dfrac{1}{n^2})$ avec $\dfrac{1}{n^2} > 0$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$) de sorte que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge.

2. On a $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(\dfrac{k+1}{k}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln k = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1)$
par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1) = C$ où C est la somme de la série de terme général u_n, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$ on a $C > 0$. Or $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k - \ln n + \ln(n+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k + \ln(1 + \dfrac{1}{n})$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n \right) = C$ avec $C > 0$

Formule de Stirling

1. On a :
$\forall n \geq 1,\ v_n$ est défini et $\forall n \geq 1,\ v_n = \ln\left(e(1+\dfrac{1}{n})^{-n} \right)$ soit $v_n = 1 - n\ln(1+\dfrac{1}{n}) = 1 - n(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + O(\dfrac{1}{n^3}))$
d'où $v_n = \dfrac{1}{2n} + O(\dfrac{1}{n^2})$ de sorte que lorsque n tend vers l'infini $v_n \sim \dfrac{1}{2n}$ avec $\dfrac{1}{2n} > 0$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{2n}$ diverge ($\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ est la série harmonique qui diverge) donc $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ diverge.

2. D'après la question précédente on a : $v_n = \dfrac{1}{2n} + O(\dfrac{1}{n^2})$, d'après la première partie :
$\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k} = \dfrac{1}{2}\ln n + \dfrac{1}{2}C + o(1)$, on en déduit alors que : $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k = \ln(\sqrt{n}) + \alpha_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$ où α est une constante ce qui donne :$\ln(a_{n+1}) - \ln a_1 = \ln(\sqrt{n}) + \alpha_n$ soit $a_{n+1} = k_n\sqrt{n}$ avec $k_n = e^{1+\alpha_n}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = k$ avec $k > 0,\ k = e^{1+\alpha}$. On en déduit alors que $a_n \sim k\sqrt{n-1}$ comme $\sqrt{n-1} \underset{\infty}{\sim} \sqrt{n}$ on en déduit :
$$a_n \sim k\sqrt{n} \quad \text{lorsque n tend vers } +\infty$$
.

3. La question précédente donne : $n!n^{-n}e^n \underset{\infty}{\sim} k\sqrt{n}$, on en déduit que : $n! \underset{\infty}{\sim} kn^ne^{-n}\sqrt{n}$

4. (a) On intègre par parties en posant $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = \sin^{n-1} t$ avec u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$, on montre alors que :
$$\forall n \geq 2,\ I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$
   (b) On déduit de la question précédente à l'aide d'une récurrence :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0, \dfrac{\pi}{2}],\ 0 \leq \sin^{n+1} t \leq \sin^n t$ avec $\forall t \in]0, \dfrac{\pi}{2}],\ 0 < \sin^{n+1} t \leq \sin^n t$ de sorte que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$ soit $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, d'où $\dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$, par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1$ et on en déduit que $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$

(d) Avec la question (b) on a : $\dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \times \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!}\dfrac{2}{\pi}$ en utilisant $n! \sim \underset{\infty}{\sim} kn^n e^{-n}\sqrt{n}$ on en déduit que : $\dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \sim \dfrac{2^{4p}k^4p^{4p}e^{-4p}p^2}{(2p+1)k^2(2p)^{4p}e^{-4p}\cdot 2p} \cdot \dfrac{2}{\pi}$ en simplifiant il vient : $\dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \sim \dfrac{k^2}{2\pi}$, comme $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$ on en déduit que $k = \sqrt{2\pi}$ ce qui donne la formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Pour aller plus loin

1. On a $\forall n \geq 1,\ w_n = e\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-(n+\frac{1}{2})}$ soit $\ln w_n = 1 - (n+\dfrac{1}{2})\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
   $\ln w_n = 1 - (n+\dfrac{1}{2})(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + o(\dfrac{1}{n^3}))$ soit $\ln w_n = -\dfrac{1}{12n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$
2. En utilisant une comparaison avec une intégrale :
   On introduit la fonction définie, continue et décroissante sur $[1, +\infty[,\ f(t) = \dfrac{1}{t^2}$, en raisonnant sur chaque intervalle $[k, k+1]$, en intégrant et en sommant les inégalités obtenues on a :
   $\displaystyle\sum_{k=n}^{N+1} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_n^{N+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2}$, lorsque N tend vers $+\infty$ on obtient $\forall n \geq 1,\ u_{n+1} \leq \dfrac{1}{n} \leq u_n$
   ou encore $\forall n \geq 2,\ \dfrac{1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n-1}$, on en déduit que :
   $$u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
   Avec la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$:
   Les séries $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n(n+1)}$ sont à termes positifs, les termes généraux $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n(n+1)}$ sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$ avec $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ convergente (série de Riemann avec $2 > 1$) de sorte que les deux séries convergent et les restes sont équivalents en $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \underset{\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)}$
   $\forall n \geq 1,\ \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ d'où $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n}$ et par suite $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ soit
   $$u_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
3. Lorsque n tend vers $+\infty$ en utilisant la question 1. on a : $-\ln w_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{12n^2}$ est une série à termes positifs convergente, de sorte que $\displaystyle\sum_{n\neq1} -\ln w_n$ converge et les restes d'ordre n des deux séries sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$, par suite $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} -\ln w_k \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ il vient alors :
   $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}(\ln b_k - \ln b_{k+1}) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{12n}$ comme $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \ln b_k = 0$ d'où
   $\ln b_n \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n}$, $\ln b_n = \dfrac{1}{12n} + o(\dfrac{1}{n})$ et
   $b_n = e^{\frac{1}{12n}+o(\frac{1}{n})} = 1 + \dfrac{1}{12n} + o(\dfrac{1}{n})$ en utilisant la définition de b_n on en déduit le résultat :
   $$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}\left(1 + \frac{1}{12n} + o(\frac{1}{n})\right)$$