Devoir libre
Formule de Stirling

L'objectif de ce devoir est de trouver un équivalent de **n**!

On se propose de démontrer la formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

I
Constante d'Euler

On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n} - \ln(1+\frac{1}{n}) \quad n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge
2. En déduire que :
$$\lim_{n->+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\ \right) = C$$
où C est une constante réelle, $C > 0$. C est la constante d'Euler.

II
Formule de Stirling

On pose : pour $n \geq 1$, $a_n = n!.n^{-n}e^n,\ v_n = \ln(\frac{a_{n+1}}{a_n})$

1. Exprimer v_n en fonction de n puis montrer que la série de terme général v_n diverge.
2. Montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que : en $+\infty$ $a_n \ \sim\ k\sqrt{n}$
3. En déduire que : $n! \ \sim\ k.n^n e^{-n}\sqrt{n}$
4. On considère $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\ dt$ $n \geq 0$
   (a) Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}
   (b) Déterminer en fonction de $p \in \mathbb{N}$, I_{2p} et I_{2p+1}
   (c) Montrer que $\lim_{p\to+\infty} \frac{I_{2p+1}}{I_{2p}} = 1$
   (d) En déduire la valeur de k
5. Prouver que :
$$n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

III
Pour aller plus loin

On pose pour $n \geq 1,\ b_n = n!n^{-n}e^n(2n\pi)^{-\frac{1}{2}}, \quad w_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$

1. Montrer que $\ln(w_n) = -\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$
2. On pose pour $n \geq 1,\ u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$ lorsque n tend vers l'infini
   (on pourra utiliser une comparaison avec une intégrale ou la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$)
3. En déduire que $b_n = 1+\frac{1}{12n}+o(\frac{1}{n})$ lorsque n tend vers l'infini, puis que $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}\left(1+\frac{1}{12n}+o(\frac{1}{n})\right)$
