SERIES de FOURIER

Ce document n'est pas un cours mais présente seulement quelques notions à connaître sur le sujet.

1 Coefficients de fourier

Soit $\mathcal{C}_{2\pi mx}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques et continues par morceaux et $f \in \mathcal{C}_{2\pi mx}$:

1. **Coefficients de fourier exponentiels**

   Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(n) = c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-int}f(t)dt$

2. **Coefficients de fourier trigonométriques**

   Pour $n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{l} a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(nt)f(t)dt \\ b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(nt)f(t)dt \end{array}$

3. **Relations**

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{array}{ll} c_n(f) = \dfrac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} & c_{-n}(f) = \dfrac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} \\ a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) & b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \end{array}$

4. **Série de Fourier de f**

   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$

   sommes partielles : $S_p(f) = \sum_{n=-p}^{p} c_k(f)e^{int} = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p} a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt)$

5. **Propriétés**

   $\mathbf{P_1}$: $f \in \mathcal{C}_{2\pi mx} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} c_n(f) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} c_{-n}(f) = 0$.

   $\mathbf{P_2}$: Si f est 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors $c_n(\mathrm{D}f) = inc_n(f)$.

   $\mathbf{P_3}$: Si f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, alors $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$ d'où $c_n(f) = o(\dfrac{1}{n^k})$.

   $\mathbf{P_4}$: Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi mx}$, $\hat{f}$ est bornée sur $\mathbb{Z}$ et $\| \hat{f} \|_\infty \leq \| f \|_1$ avec $\| f \|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} | f(t) | \,\mathrm{d}t$

2 Théorèmes de convergence

2.1 Convergence normale

Théorème 1

Hypothèses : $\begin{cases} 1. f \text{ est } 2\pi \text{ périodique sur } \mathbb{R} \text{ à valeurs dans } \mathbb{C} \\ 2. f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ 3. f \text{ est de classe } C^1 \text{par morceaux sur } \mathbb{R} \end{cases}$

Conclusion : *La série de fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f*

2.2 Convergence simple

Théorème 2

Hypothèses : $\begin{cases} 1. f \text{ est } 2\pi \text{ périodique sur } \mathbb{R} \text{ à valeurs dans } \mathbb{C} \\ 2. f \text{ est de classe } C^1 \text{ par morceaux sur } \mathbb{R} \end{cases}$

Conclusion : *La série de fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme $\widetilde{f}$*

avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\widetilde{f}(x) = \lim_{h->0^+} \dfrac{f(x+h) + f(x-h)}{2}$

en particulier : *si f est continue en x*, $\widetilde{f}(x) = f(x)$

3 Convergence en moyenne quadratique

Soit $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'algèbre des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ 2π-périodiques et continues sur $\mathbb{R}$

3.1 Produit scalaire

$\forall (f,g) \in \mathcal{C}_{2\pi}^2 \; < f,g >= \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$

norme quadratique : $||f||_2 = \left(\dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\dfrac{1}{2}}$

Proposition 1

- $(\mathcal{C}_{2\pi}, < \, , \, >)$ *est un espace préhilbertien complexe*
- $(e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$*est un système orthonormé de* $\mathcal{C}_{2\pi}$
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $f_{2p}(t) = \cos(pt)$ *et* $f_{2p+1}(t) = \sin(pt)$, $p \in \mathbb{N}$ *est un système orthogonal avec :*
  $\|f_0\| = 1, \; \|f_1\| = 0, \; \|f_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad n \geq 2$

Posons $\mathcal{P}_n = vect < e^{ikt} >_{-n\leq k\leq n} = vect < f_p >_{0\leq p\leq 2n+1}$, $\dim \mathcal{P}_n = 2n+1$

Proposition 2

Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$,

- $\forall n \in \mathbb{N}, \; c_n(f) =< e^{int}, f >$, $a_n(f) =< 2\cos(nt), f >, \; b_n(f) =< 2\sin(nt), f >$
- $S_n(f) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikt} = \dfrac{a_0(f)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt)$
- $S_n(f)$ *est la projection orthogonale de* f *sur* $\mathcal{P}_n$

3.2 Convergence

Théorème 3 convergence en moyenne quadratique

$f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, la suite $(S_n(f))_n$ converge en moyenne quadratique vers f.
Soit $\lim\limits_{n->n} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(t) - f(t)|^2 \, dt = 0$

Théorème 4 *Théorème de Parseval*

$f \in \mathcal{C}_{2\pi}$,
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2}{2}$$

Théorème 5

$(f,g) \in \mathcal{C}_{2\pi}^2$ *si* $\forall n \in \mathbb{Z}, \; c_n(f) = c_n(g)$ *alors* $f = g$

4 Fonctions T-périodiques

Pour $T > 0$ soit $\mathcal{C}_{Tmx}$ l'algèbre des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ T-périodiques et continues par morceaux.

Pour f application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ on pose $g(t) = f(\frac{T}{2\pi}t), \; t \in \mathbb{R}$.
$f \in \mathcal{C}_{Tmx}$ si et seulement si $g \in \mathcal{C}_{2\pi mx}$, les résultats sur les séries de fourier applicables à g se traduisent alors aisément pour f.
Coefficients de fourier de f

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u) e^{-\frac{2in\pi}{T}u} du, \quad a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)\cos(n\frac{2\pi}{T}u) du \text{ et } b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)\sin(n\frac{2\pi}{T}u) du$$