Séries de fonctions
à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Ce document n'est pas un cours complet, il donne un aperçu rapide des principaux résultats à connaître sur les séries de fonctions numériques.

Soit $(u_n)_n$ une suite d'applications d'un ensemble A non vide à valeurs dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé $(F, \| \ \|_F)$ de dimension finie et S une application de A vers F ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Différents types de convergence de la série $\sum u_n$:

1.1 Convergence simple :

$\sum u_n$ converge simplement sur A si $\forall x \in A,\ \sum u_n(x)$ converge dans F.

1.2 Convergence absolue

$\sum u_n$ converge absolument sur A si $\forall x \in A,\ \sum \| u_n(x) \|_F$ converge dans $\mathbb{R}$.

1.3 Convergence uniforme

$\sum u_n$ converge uniformément sur A si $\sum u_n$ converge simplement sur A et

$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \underset{x\in I}{sup}(\| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \|_F) \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n\to+\infty} \underset{x\in I}{sup}(\| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \|_F) = 0$

1.4 Convergence uniforme sur tout segment

Dans ce paragraphe A est un intervalle de $\mathbb{R}$.
$\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de A si pour tout segment $[a, b]$ inclus dans A, $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

1.5 Convergence normale

Soit $(\mathcal{B}(A, F), N_\infty)$ l'espace vectoriel normé des fonctions définies sur A à valeurs dans F et bornées sur A, rapporté à la norme N_∞, $\quad \forall f \in \mathcal{B}(A, F),\ N_\infty(f) = \sup_{x\in A} \| f(x) \|_F$

$\sum u_n$ converge normalement sur A si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathcal{B}(A, F)$ et $\sum N_\infty(u_n)$ converge.

2 Propriétés

2.1 Convergence simple :

- Pour étudier la convergence simple de $\sum u_n$ sur un ensemble A, on fixe x quelconque dans A et on étudie alors la convergence de la série $\sum u_n(x)$, on utilise alors les résultats sur les séries à valeurs dans un espace vectoriel normé.
- L'ensemble sur lequel de la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement est l'ensemble de définition de la fonction S définie par : $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$.

2.2 Convergence uniforme

- Si $\sum u_n$ converge uniformément sur A Alors $\sum u_n$ converge simplement sur A.

- $\sum u_n$ converge uniformément sur A si et seulement si
$$\begin{cases} \sum u_n \text{ converge simplement sur } A \\ (R_n)_n \text{converge uniformément vers 0 sur } A \text{ avec } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x). \\ (\text{C'est à dire : } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \underset{x\in I}{sup}(\| R_n(x) \|_F) \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \underset{x\in A}{sup}(\| R_n(x) \|_F) = 0) \end{cases}$$
- $\sum u_n$ converge uniformément sur A si et seulement si
$$\begin{cases} \sum u_n \text{ converge simplement sur } A \\ \exists (\alpha_n)_n,\ \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tels que } \forall n \geq n_{0,} \forall x \in A,\ \| R_n(x) \|_F \leq \alpha_n. \end{cases}$$
- **Propriété de Cauchy uniforme :**

  Définition 1 *La série de fonction* $\sum u_n$ *vérifie la propriété de cauchy uniforme sur* A *si et seulement si* $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N$ *et* $p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \forall x \in A,\ \| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \|_F \leq \varepsilon$
- $\sum u_n$ vérifie la propriété de Cauchy uniforme sur A si et seulement si
$\exists (\alpha_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0,$ et $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in A,\ \| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \|_F \leq \alpha_n$
- $\sum u_n$ converge uniformément sur A si et seulement si $\sum u_n$ vérifie la propriété de cauchy uniforme sur A

2.3 Convergence normale

- $\sum u_n$ converge normalement sur A si et seulement si
$\exists (\alpha_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_n \alpha_n$ converge et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ \| u_n(x) \|_F \leq \alpha_n$.
- Si $\sum u_n$ converge normalement sur A Alors $\sum u_n$ converge uniformément sur A
- Si $\sum u_n$ converge normalement sur A Alors $\sum u_n$ converge absolument et simplement sur A
- $\sum u_n$ converge normalement sur A si et seulement si $\sum u_n$ converge absolument dans $(\mathcal{B}(A, F), N_\infty)$
on a alors $N_\infty(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_\infty(u_n)$
- Dans $\mathcal{C}([a, b], F)$ si $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, b]$ alors $\sum u_n$ converge dans $(\mathcal{C}([a, b], F), N_1)$, où $\forall f \in \mathcal{C}([a, b], F),\ N_1(f) = \int_a^b \| f(t) \|_F \,\mathrm{d}t$, $\sum N_1(u_n)$ converge dans $\mathbb{R}$ et $N_1(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(u_n)$.
On dit que $\sum u_n$ converge en moyenne dans $\mathcal{C}([a, b], F)$.

3 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes

3.1 Limites

Dans ce paragraphe A est une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_E)$ de dimension finie et a est adhérent à A, $a \in \overline{A}$ ou A est un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $a \in A$ ou a est une extrémité de A éventuellement infinie ou $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$

Théorème 1
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to a} u_n(x) = l_n,\ l_n \in F$
2. $\sum u_n$ *converge uniformément sur* A

Alors

1. $\sum l_n$ *converge dans* F
2. $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} u_n(x)$.

3.2 Continuité

Dans ce paragraphe A est une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_E)$ de dimension finie

Théorème 2 *Soit $a \in A$*
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est continue en* a
2. $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ *converge uniformément sur* A

Alors $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est continue en* a.

Théorème 3
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est continue sur* A
2. $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ *converge uniformément sur* A

Alors $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est continue sur* A.

Applications :

Théorème 4
Dans une algèbre normé de dimension finie $(\mathcal{A}, +, \times, .\ )$ *d'élément unité* e *:*

1. *L'application* $u \mapsto (e-u)^{-1}$ *est continue sur la boule unité ouverte* $BO(0,1) = \{u \in \mathcal{A},\ \| u \| < 1\}$
2. *L'application* $u \mapsto \exp(u)$ *est continue sur* $\mathcal{A}$

3.3 Intégration

Dans ce paragraphe A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 5
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est continue sur* $[a,b] \subset A$
2. $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$

Alors $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\mathrm{dx}$

Théorème 6
Soit a un point de A
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est continue sur* A
2. $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ *converge uniformément sur tout segment de* A
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n$ *est la primitive de* u_n *qui s'annule en* a, $\forall x \in I,\ v_n(x) = \displaystyle\int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t$

Alors

1. $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$ *converge uniformément sur tout segment de* A
2. $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A*, c'est la primitive de* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *sur* I *qui s'annule en* a.

$$\forall x \in A,\ \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t$$

3.4 Dérivabilité

Dans ce paragraphe A est un intervalle de $\mathbb{R}$

Théorème 7
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A
2. $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge simplement sur* A
3. $\sum\limits_{n\geq 0} u'_n$ *converge uniformément sur tout segment de* A

Alors

1. $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* A.
2. $S' = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u'_n$
3. $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge uniformément sur tout segment de* A

On a aussi

Théorème 8
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^p$, $(p \in \mathbb{N}^*)$ *sur* A
2. $\forall k \in [\![0, p-1]\!] \sum\limits_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ *converge simplement sur* A
3. $\sum\limits_{n\geq 0} u_n^{(p)}$ *converge uniformément sur tout segment de* A

Alors

1. $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est* $\mathcal{C}^p$ *sur* A.
2. $\forall k \in [\![0, p]\!],\ S^{(k)} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$
3. $\forall k \in [\![0, p]\!] \sum\limits_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ *converge uniformément sur tout segment de* A

Souvent dans la pratique on utilise :

Théorème 9
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^p$ *sur* A *(*$p \in \mathbb{N}^*$ *ou* $p = +\infty$*)*
2. $\forall k \in [\![0; p]\!] \sum\limits_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ *converge uniformément sur tout segment de* A

Alors

1. $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est* $\mathcal{C}^p$ *sur* A.
2. $\forall k \in [\![0, p]\!]$ *(ou* $\forall k \in \mathbb{N}$ *si* $p = +\infty$*)* , $S^{(k)} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$

Application : **Fonction exponentielle**
Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \,.\,, \| \ \|_{\mathcal{A}})$ une algèbre normée de dimension finie.

Théorème 10
Si $a \in \mathcal{A}$ *et* $e_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{A} \\ t & \mapsto & \exp ta \end{array}$
Alors e_a *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathrm{D}e_a = ae_a = e_a a$