Séries de fonctions numériques

Ce document n'est pas un cours complet, il donne un aperçu rapide des principaux résultats à connaître sur les séries de fonctions numériques.

1 Séries de fonctions

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'un ensemble non-vide A vers $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1.1 Différents types de convergence de la série $\sum u_n$:

1.1.1 Convergence simple :

$\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur A si $\forall x\in A$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge

1.1.2 Convergence absolue

$\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument sur A si $\forall x\in A$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ converge absolument

1.1.3 Convergence uniforme

$\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur A si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$ converge uniformément sur A

C'est à dire que :

- $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge simplement sur A et en posant $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in A$, $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$
- $\exists n_0\in\mathbb{N},\ n\geq n_0\Rightarrow \sup\limits_{x\in A}(|R_n(x)|)\in\mathbb{R}$ et pour $\parallel R_n\parallel_\infty=\sup\limits_{x\in A}(|R_n(x)|)$, on a $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\ n\geqslant n_0}}\parallel R_n\parallel_\infty=0$

1.1.4 Convergence uniforme sur tout segment

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
$\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur tout segment de I si
pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$.

1.1.5 Convergence normale

$\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur A si $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sup\limits_{x\in A}(|u_n(x)|)\in\mathbb{R}^+$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\parallel u_n\parallel_\infty$ converge où
$\parallel u_n\parallel_\infty=\sup\limits_{x\in A}(|u_n(x)|)$.

1.2 Propriétés

1.2.1 Convergence simple :

- Pour étudier la convergence simple de $\sum u_n$ sur un ensemble non-vide A, on fixe x quelconque dans A et on étudie alors la convergence de la série numérique $\sum u_n(x)$, on utilise alors les résultats sur les séries numériques.
- L'ensemble sur lequel de la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement est l'ensemble de définition de la fonction F définie par : $F(x)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$.

1.2.2 Convergence uniforme

- Si $\sum u_n$ converge uniformément sur A Alors $\sum u_n$ converge simplement sur A.
- $\sum u_n$ converge uniformément sur A si et seulement si
$$\begin{cases} \sum u_n \text{ converge simplement sur } A \\ (R_n)_n \text{converge uniformément vers 0 sur } A \text{ avec } R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x). \\ \text{(C'est à dire : } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x\in A}(|R_n(x)|) \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \| u_n \|_\infty = 0) \text{ avec } \| u_n \|_\infty = \sup_{x\in A}(|R_n(x)|) \end{cases}$$
- $\sum u_n$ converge uniformément sur l'ensemble A si et seulement si
$$\begin{cases} \sum u_n \text{ converge simplement sur } A \\ \exists (\alpha_n)_n,\ \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tels que } \forall n \geq n_{0,}\ \forall x \in A,\ | R_n(x) | \leq \alpha_n. \end{cases}$$
- **Propriété de Cauchy uniforme :**

  Définition 1 *La série de fonction* $\sum u_n$ *vérifie la propriété de cauchy uniforme sur* A *si et seulement si*
  $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \text{ et } p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \forall x \in A,\ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \varepsilon$$
- $\sum u_n$ vérifie la propriété de Cauchy uniforme sur A si et seulement si
$$\exists (\alpha_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0,\ \text{ et } \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in A,\ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \alpha_n$$
- $\sum u_n$ converge uniformément sur A si et seulement si $\sum u_n$ vérifie la propriété de cauchy uniforme sur A

1.2.3 Convergence normale

- $\sum u_n$ converge normalement sur A si et seulement si
$\exists (\alpha_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\displaystyle\sum_n \alpha_n$ converge et $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in A,\ | u_n(x) | \leq \alpha_n$.
- Si $\sum u_n$ converge normalement sur A Alors $\sum u_n$ converge uniformément sur A
- Si $\sum u_n$ converge normalement sur A Alors $\sum u_n$ converge absolument et simplement sur A

1.3 Propriétés pour les séries de fonctions uniformément convergentes

1.3.1 Limites

Dans ce paragraphe A est un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in A$ ou a est une extrémité de A dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou $A = \mathbb{N}$ avec $a = +\infty$.

Théorème 1
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to a} u_n(x) = l_n,\ l_n \in \mathbb{K}$
2. $\sum u_n$ *converge uniformément sur* A

Alors

1. $\sum l_n$ *converge*
2. $\displaystyle\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} u_n(x).$

1.3.2 Continuité

Théorème 2 *Soit* $a \in I$ *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est continue en* a
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge uniformément sur* I

Alors $F = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est continue en* a.

Théorème 3
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est continue sur* I *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$
2. $\sum_{n \geq 0} u_n$ *converge uniformément sur tout segment* $[a, b] \subset I$

Alors $F = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est continue sur* I.

1.3.3 Intégration

Théorème 4
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est continue sur* $[a, b] \subset I$ *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.
2. $\sum_{n \geq 0} u_n$ *converge uniformément sur* $[a, b]$

Alors $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\mathrm{dx}$

Théorème 5
Soit a *un point de* I
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est continue sur* I *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.
2. $\sum_{n \geq 0} u_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n$ *est la primitive de* u_n *qui s'annule en* a, $\forall x \in I,\ v_n(x) = \int_a^x u_n(t)\mathrm{dt}$

Alors

1. $\sum_{n \geq 0} v_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.
2. *La fonction* G *définie par* $G = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I, *c'est la primitive de la fonction* F *définie par* $F = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *sur* I *qui s'annule en* a.

$$\forall x \in I,\ \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \right) \mathrm{dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x u_n(t)\mathrm{dt}$$

1.3.4 Dérivabilité

Théorème 6
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *où* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.
2. $\sum_{n \geq 0} u_n$ *converge simplement sur* I
3. $\sum_{n \geq 0} u_n'$ *converge uniformément sur tout segment de* I

Alors

1. $F = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* I.
2. $F' = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n'$
3. $\sum_{n \geq 0} u_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I

2 Séries entières

On appelle série entière de la variable complexe une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}$

On appelle série entière de la variable réelle une série de fonctions de la forme $\sum a_n x^n$ où $a_n \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}$

2.1 Rayon de convergence

2.1.1 Définition

Lemme 1 (lemme d'Abel) *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de la variable complexe.*
Si $\rho > 0$ *vérifie* $(|a_n|\rho^n)_n$ *est bornée,*
Alors $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < \rho \Rightarrow |a_n z^n| = O(\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n)$

Théorème 7

- *Pour toute série entière de la variable complexe* $\sum a_n z^n$ *il existe un unique élément* $R \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *tel que* $DO(0,R) \subset \{z \in \mathbb{C},\ \sum a_n z^n$ *converge*$\} \subset DF(0,R)$, *R est le rayon de convergence de la série.*
- *Si* $|z| < R$ *Alors* $\sum a_n z^n$ *converge absolument, le disque* $DO(0,R)$ *est le disque ouvert de convergence.*
- *Si* $|z| > R$ *Alors* $\sum a_n z^n$ *diverge*

2.1.2 Calcul du rayon de convergence

- $R = \sup\{r \geq 0\ tq\ \sum_{n\geq} a_n r^n\ converge\}$ où R désigne le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$
- $R = \sup\{r \geq 0\ tq\ \lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0\}$
- $R = \sup\{r \geq 0\ tq\ (a_n r^n)_n$ est bornée$\}$
- Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge Alors $|z| \leq\ R$
- Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge Alors $|z| \geq\ R$

On peut utiliser les propriétés de convergence des séries numériques et des séries de fonctions pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière, par exemple :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_b :

- Si $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |a_n| \leq |b_n|$ Alors $R_a \geq R_b$
- Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$
- Si $a_n \sim b_n$ Alors $R_a = R_b$. etc...

Opérations :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_b

Somme : $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)z^n$ a un rayon de convergence R_s tel que :

(a) $R_s \geq \min(R_a, R_b)$
(b) Si $R_a \neq R_b$ Alors $R_s = \min(R_a, R_b)$
(c) Si $|z| < \min(R_a, R_b)$ Alors $\sum_{k=0}^{+\infty}(a_n + b_n)z^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{k=0}^{+\infty} b_n z^n$

Produit : $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} b_n z^n\right)$ a un rayon de convergence R_p tel que : $R_p \geq \min(R_a, R_b)$ et

Si $|z| < \min(R_a, R_b)$ Alors $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Dérivée : pour une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, on appelle série entière dérivée la série entière $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1} z^n$

Proposition 1 *Une série entière et sa série entière dérivée ont même rayon de convergence.*

Plus généralement :

Proposition 2 $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} n a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} a_n z^n$ *ont même rayon de convergence.*

2.1.3 Convergence

- Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$

  Alors

  1. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge simplement sur $DO(0, R)$
  2. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement et donc uniformément sur tout disque fermé $DF(0, r)$ où $r < R$.

  Conséquence :

  la fonction somme $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $DO(0, R)$

- Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et $\sum_{n\geq 0} |a_n| R^n$ converge

  Alors

  1. $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur $DF(0, R)$
  2. la fonction somme $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $DF(0, R)$

2.2 Série entière d'une variable réelle

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, une série entière de la variable réelle de rayon de convergence R, avec $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \in \mathbb{C}$, on suppose $R > 0$ et on considère la fonction somme :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Propriétés :

1. Si D_F désigne l'ensemble de définition de F Alors $]-R, R[\subset D_F \subset [-R, +R]$
2. F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, +R[$
3. $\forall x \in]-R, +R[$ on a $F'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$
4. Si G désigne une primitive de F sur $]-R, +R[$ on a : $\forall x \in]-R, +R[, \quad G(x) = G(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$
5. Les dérivées de F s'obtiennent en dérivant la série définissant F successivement terme à terme.

   Si $p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-R, +R[$, $F^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\ldots(n+1) a_{n+p} x^n$ ce qui s'écrit aussi :

   $\mathrm{D}^p F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\ldots(n+1) a_{n+p} x^n$
6. $\forall x \in]-R, +R[, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ on a $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}$ ou encore $a_n = \frac{\mathrm{D}^n F(0)}{n!}$ soit

   $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
7. Si $\forall x \in]-R, +R[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ Alors au voisinage de 0, $F(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + O(x^{n+1})$.

2.3 Développement en série entière

2.3.1 Définition

Définition 2
Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-r,+r[$ où $r>0$, on dit que f est développable en série entière sur $]-r,r[$ si f est la somme d'une série entière sur $]-r,+r[$

Proposition 3
lorsque f est développable en série entière sur $]-r,+r[$, le développement est unique et on a :

$$\forall x \in]-r,+r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

.

Définition 3
Si f est une fonction de classe C^∞ sur $]-r,+r[$ où $r>0$ on appelle série de taylor de f la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^n(0)}{n!} x^n$

Remarque 1
Une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $]-r,r[$ n'est pas toujours développable en série entière.
Par exemple la fonction f définie par $f(0)=0$, $\forall x \neq 0,\ f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ f^n(0) = 0$, f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Une méthode pour montrer qu'une fonction est développable en série entière au voisinage de 0 :
Si f est une fonction de classe C^∞ sur $I =]-r,+r[$, pour montrer que f est développable en série entière sur I, on écrit un développement de Taylor de f sur I, pour $x \in I$ fixé :
$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(0)}{k!} x^k + R_n(x)$ avec $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)\mathrm{d}t$ ou $|\ R_n(x)\ | \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{|t|\leq|x|} |f^{(n+1)}(t)|$
On montre ensuite que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, c'est à dire que $(R_n)_n$ converge simplement vers 0 sur I.

2.3.2 Quelques développements en série entière à connaître

Avec	le développement	est valable pour
$z \in \mathbb{C}$	$e^{tz} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} t^n$	$t \in \mathbb{R}$
	$\sin t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$	$t \in \mathbb{R}$
	$\cos t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}$	$t \in \mathbb{R}$
	$\ln(1+t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$	$t \in]-1,1]$
$\alpha \in \mathbb{R}$	$(1+t)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} t^n$	$t \in]-1,+1[$, ($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$)

3 Séries doubles doubles numériques

Théorème 8 (d'interversion de sommation - Fubini)
Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ *une famille d'éléments de* $\mathbb{K}$

Si

1. *Pour tout* $q \in \mathbb{N}$, $\left(\sum_{p\geq 0} |u_{p,q}|\right)$ *converge*
2. $\sum_{q\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right)$ *converge*

Alors

1. *Pour tout* $q \in \mathbb{N}$, $\left(\sum_{p\geq 0} u_{p,q}\right)$ *converge*
2. *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $\left(\sum_{q\geq 0} u_{p,q}\right)$ *converge*
3. $\sum_{q\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ *converge*
4. $\sum_{p\geq 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ *converge*
5. $\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$