SERIES

Ce document n'est pas un cours complet, il donne un aperçu rapide des principaux résultats à connaître sur les séries.

1 Séries à termes réels ou complexes

1.1 Généralités

- On appelle série de terme général u_n, on note $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ la suite $(S_n)_n$ avec $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ où $(u_n)_n$ est une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).
- La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ où $u_0 = S_0$ et $u_k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \geq 1$.
- la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(S_n)_n$ converge. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = l$, on dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge et a pour somme l. On note $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = l$.
- Pour une série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\quad S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est la somme partielle d'ordre n et si la série converge et a pour somme S alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k\geq n+1} u_k$ converge et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est le reste d'ordre n. $\forall n \in \mathbb{N}$, $S = S_n + R_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.
- **Condition nécessaire de convergence : Si** $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge **Alors** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

  Attention : la réciproque est fausse :

  Exemple 1 *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ *et pourtant* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ *diverge*
- Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge on dit que $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge absolument, dans ce cas elle est convergente. Si la série converge sans converger absolument on dit qu'elle est semi-convergente.

  Exemple 2 *La série* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ *est semi-convergente.*

1.2 Séries à termes positifs

1.2.1 convergence

$u_n \geq 0$, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si les sommes partielles sont majorées.

1.2.2 Relations de comparaison

- Si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0\ \ 0 \leq u_n \leq v_n$ alors $\begin{cases} \sum v_n \text{ converge} & \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ converge} \\ \sum u_n \text{ diverge} & \Rightarrow \quad \sum v_n \text{ diverge} \end{cases}$
- Si $\forall n \geq 0,\ u_n \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $v_n \geq 0$ avec $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ alors
$$\begin{cases} \sum v_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ converge absolument et } \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \mathrm{O}(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k) \\ \sum u_n \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum v_n \text{ diverge et } \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \mathrm{O}(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k) \end{cases}$$
- Si $\forall n \geq 0,\ u_n \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $v_n \geq 0$ avec $u_n = o(v_n)$ alors
$$\begin{cases} \sum v_n \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ converge absolument et } \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k) \\ \sum u_n \text{ diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum v_n \text{ diverge et } \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = o(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k) \end{cases}$$

- Si $\forall n \geq 0,\ u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ avec $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \sum v_n$ converge et

$$\begin{cases} \text{Si les deux séries convergent} & \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \\ \text{Si les deux séries divergent} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k \end{cases}$$

1.2.3 Comparaison avec une intégrale

- Soit f une application continue par morceaux et décroissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$:
  1. Si $\forall n \geq 1,\ w_n = \left(\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\mathtt{dt}\right) - f(n)$, Alors $\sum w_n$ converge.
  2. $\sum f(n)$ converge $\Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[)$

Rappel : Pour une fonction continue par morceaux f définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on a :
$f \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[)$si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$

1.2.4 Séries de Riemann

Définition 1 *On appelle série de Riemann une série de terme général* $\dfrac{1}{n^\alpha}$*,* $n \geq 1$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

Proposition 1 *La série de Riemann* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$*.*

1.2.5 Séries géométriques

Proposition 2 *On considère une série géométrique de premier terme non-nul* $u_0 \in \mathbb{K}^*$ *et de raison* $q \in \mathbb{K}$ *:*

1. *Si* $|q| < 1$ *la série converge absolument et* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = \dfrac{u_0}{1-q}$
2. *Si* $|q| \geq 1$ *la série diverge (le terme général ne convege pas vers* 0 *lorsque* n *tend vers* $+\infty$*)*

1.2.6 Formule de Stirling

Théorème 1 (Formule de Stirling)

$$n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi}$$

1.2.7 Développement décimal

Soit $S_D = \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}},\ c_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq 1,\ c_n \in [\![0, 9]\!],$ il n'existe pas $n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ c_n = 9\}$

Théorème 2 *L'application :*

$$\begin{array}{rcl} S_D & \to & \mathbb{R}^+ \\ (c_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & x = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{c_n}{10^n} \end{array}$$

est une bijection, pour $x \in \mathbb{R}^+$*,* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{c_n}{10^n}$ *est le développement décimal de* x

Pour $x \in \mathbb{R}^+,\ x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{c_n}{10^n}$ avec $c_0 = E(x),\ c_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq 1,\ c_n = E(10^n x) - 10E(10^{n-1}x),\ c_n\ [\![0, 9]\!]$,
$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_D$ avec si $t \in \mathbb{R}^+,\ E(t)$ désigne la partie entière de t
Si $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{c_k}{10^k}$, x_n est une valeur approchée par défaut de x à 10^{-n} près, $x_n \leq x < x_n + \dfrac{1}{10^n}$

1.3 Séries à termes de signes quelconques

1.3.1 Règle de d'Alembert

Si $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ u_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$ Alors $\begin{cases} l < 1 & \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ est absolument convergente} \\ l > 1 & \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ est divergente} \\ l = 1 & \quad\quad \text{on ne peut pas conclure.} \end{cases}$

1.3.2 Critère de Cauchy

$\sum u_n$ converge si et seulement si $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ tq\ n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon$

1.3.3 Théorème Spécial des Séries Alternées(appelé parfois théorème de Leibniz)

Si $\begin{cases} 1) & (u_n)_n \text{ est à termes positifs} \\ 2) & (u_n)_n \text{ est décroissante} \\ 3) & \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \end{cases}$ **Alors** $\begin{cases} 1) & \sum (-1)^n u_n \text{converge} \\ 2) & \forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n} \\ 3) & \forall n \in \mathbb{N}\ |R_n| \leq u_{n+1} \end{cases}$

1.3.4 Produit de Cauchy

$\left(\sum\limits_{n\geq 0} u_n \right) \times \left(\sum\limits_{n\geq 0} v_n \right) = \left(\sum\limits_{n\geq 0} w_n \right)$ avec $w_n = \sum\limits_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$.

Le produit de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente et :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

1.4 Séries doubles

Série doubles à termes positifs

Théorème 3 (d'interversion de sommation - Fubini)

Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ *une famille d'éléments de* $\mathbb{R}^+$

Si

1. *Pour tout* $q \in \mathbb{N}$, $\left(\sum\limits_{p\geq 0} u_{p,q} \right)$ *converge*
2. $\sum\limits_{q\geq 0} \left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ *converge*

Alors

1. *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $\left(\sum\limits_{q\geq 0} u_{p,q} \right)$ *converge*
2. $\sum\limits_{p\geq 0} \left(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ *converge*
3. $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum\limits_{q=0}^{+\infty} \sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$

Série doubles numériques

Théorème 4 (d'interversion de sommation - Fubini)
Soit $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ *une famille d'éléments de* $\mathbb{K}$

Si

1. *Pour tout* $q \in \mathbb{N}$, $\left(\sum\limits_{p\geq 0} |u_{p,q}| \right)$ *converge*
2. $\sum\limits_{q\geq 0} \left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right)$ *converge*

Alors

1. *Pour tout* $q \in \mathbb{N}$, $\left(\sum\limits_{p\geq 0} u_{p,q} \right)$ *converge*
2. *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $\left(\sum\limits_{q\geq 0} u_{p,q} \right)$ *converge*
3. $\sum\limits_{q\geq 0} \left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ *converge*
4. $\sum\limits_{p\geq 0} \left(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right)$ *converge*
5. $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \sum\limits_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} = \sum\limits_{q=0}^{+\infty} \sum\limits_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}$