Lycée Baimbridge

Suites et Séries géométriques

Définition 1
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* $\mathbb{K}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique si et seulement si* $\exists q \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$, q *est appelé la raison de la suite géométrique.*

Proposition 1
Une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est entièrement déterminée par son premier terme* $u_0 = a$, $a \in \mathbb{K}$, *et sa raison* q, $q \in \mathbb{K}$. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est la suite géométrique de premier terme* a *et de raison* q.
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = aq^n$.

Proposition 2 (convergence d'une suite géométrique) *la suite géométrique de premier terme* $u_0 \neq 0$ *et de raison* q *converge si et seulement si* $|q| < 1$ *et alors* $\lim\limits_{n->+\infty} u_n = 0$ *ou* $q = 1$ *et alors la suite est constante* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0$.

Définition 2 *On appelle série géométrique une série dont le terme général est le terme général d'une suite géométrique .*

Proposition 3 (Somme des n premiers termes) *La somme des n+1 premiers termes d'une série géométrique de premier terme* u_0 *et de raison* q *est :*
$$\sum_{k=0}^{n} u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad (= premierterme \frac{1 - raison^{\text{nombre de termes}}}{1 - raison})$$

Proposition 4 (convergence d'une série géométrique) *La série géométrique de premier terme* $u_0 \neq 0$ *et de raison* $q \neq 0$ *converge si et seulement si* $|q| < 1$.
Si $|q| < 1$ *on a alors* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 \frac{1}{1-q}$ $(= \frac{premierterme}{1 - raison})$ *avec* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ *on a aussi :*
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_0 \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_{n+1}}{1-q} \quad \text{avec} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k \text{ de plus } \frac{u_0}{1-q} = \sum_{k=0}^{n} u_k + R_n$$