

Suites et Séries géométriques

Définition 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{K} , $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique si et seulement si $\exists q \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$, q est appelé la raison de la suite géométrique.

Proposition 1

Une suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est entièrement déterminée par son premier terme $u_0 = a$, $a \in \mathbb{K}$, et sa raison q , $q \in \mathbb{K}$. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme a et de raison q .
On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = aq^n$.

Proposition 2 (convergence d'une suite géométrique) la suite géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison q converge si et seulement si $|q| < 1$ et alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ou $q = 1$ et alors la suite est constante $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$.

Définition 2 On appelle série géométrique une série dont le terme général est le terme général d'une suite géométrique .

Proposition 3 (Somme des n premiers termes) La somme des $n+1$ premiers termes d'une série géométrique de premier terme u_0 et de raison q est :

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (= \text{premier terme} \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}})$$

Proposition 4 (convergence d'une série géométrique) La série géométrique de premier terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q \neq 0$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Si $|q| < 1$ on a alors $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = u_0 \frac{1}{1 - q}$ ($= \frac{\text{premier terme}}{1 - \text{raison}}$) avec $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k$ on a aussi :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_0 \frac{q^{n+1}}{1 - q} = \frac{u_{n+1}}{1 - q} \text{ avec } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^N u_k \text{ de plus } \frac{u_0}{1 - q} = \sum_{k=0}^n u_k + R_n$$

Exemples

Exercice 1 Montrer que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ avec $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$

en déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$

solution : Pour $t \in [0, 1]$ on a : $\sum_{k=0}^n (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1 + t}$

de sorte que pour : $t \in [0, 1]$ on a $\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-t)^k + \frac{(-t)^{n+1}}{1+t}$ d'où $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \int_0^1 (\sum_{k=0}^n (-1)^k t^k) dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$

soit on obtient : $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^k dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt$ avec $0 \leq |\int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt| \leq \int_0^1 t^{n+1} dt \leq \frac{1}{n+2}$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt = 0$ et par suite :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \text{ soit } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2$$

Exercice 2 (à chercher)

On pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$ (avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{e^{-nx}}{n}$) et $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}$ pour $x \in]0, +\infty[$

1. Pour $x > 0$ on pose $H(x) = \int_x^{+\infty} G(t) dt = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_x^X G(t) dt$, montrer que $H = F$

2. En déduire la valeur de $F(x)$