Réduction d'endomorphismes

Ce document n'est pas un cours mais présente seulement quelques notions à connaître sur le sujet.
Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1 Sous espaces stables

1.1 Définitions :

1.1.1 Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme

Définition 1 *Soit F un sous espace vectoriel de E et f un endomorphisme de E.*
On dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$

Exemple 1 *Pour $u \in L(E)$, $\operatorname{Im} u, \ker u$, une droite vectorielle admettant pour vecteur directeur un vecteur propre, un sous-espace propre sont des sous-espaces stables par u (pour les définitions de valeur propre, vecteur propre et sous espace propre voir 3.1).*

Propriété 1 *Si $F = vect < u_1, \ldots, u_p >$ (sous espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1 \ldots, u_p$) Alors F est stable par $f \in L(E)$ si et seulement si $\forall k \in \{1, \ldots, p\}$ $f(u_k) \in F$*

Proposition 1 *Si u et v sont deux endomorphismes qui commutent, alors $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont stables par v.*
conséquence : Si $u \circ v = v \circ u$ alors les sous-espace propres de u sont stables par v.

1.1.2 Endomorphisme induit

Définition 2 *Soit $f \in L(E)$ et F un sous espace stable par f. la restriction de f à F est un endomorphisme de F qui s'appelle l'endomorphisme induit par f à F. $f_{/F} \in L(F)$.*

1.2 Dimension finie

On suppose E de dimension finie n

1.2.1 Matrice dans une base adaptée à un sous-espace vectoriel F.

Soit F un sous espace vectoriel de E et G un supplémentaire. $E = F \oplus G$. On appelle base adaptée à cette décomposition une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \cdots, e_p)$ soit une base de F et $(e_{p+1}, \cdots, e_n)$ une base de G.

Proposition 2 *Soit $f \in L(E)$, avec les notations précédentes : F est stable par f si et seulement si la matrice de f dans la base B est de la forme* $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, *avec $A \in M_p(\mathbb{K})$, $C \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$, $D \in M_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$.*

Proposition 3 $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$

Conséquence :
Si P_f désigne le polynôme caractéristique de f (voir 2.3), $P_f(X) = \det(f - XI_d)$ on a : $P_f(X) = P_A(X)P_D(X)$ avec $P_A(X) = \det(A - XI_p)$ et $P_D(X) = \det(D - XI_{n-p})$

Proposition 4
Si $f \in L(E)$ et F est un sous espace vectoriel stable par f
alors le polynôme caractéristique de $f_{/F}$ divise le polynôme caractéristique de f

1.2.2 Matrice dans une base adaptée à une décomposition $E = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$

Proposition 5 *Soit $f \in L(E)$, $\forall i \in \{1, \cdots, r\}, E_i$ est stable par f si et seulement si la matrice de f dans une base B adaptée à la décomposition $E = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} E_i$, est de la forme* $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & A_r \end{pmatrix}$ *avec $A_i \in M_{p_i}(\mathbb{K})$,*

$p_i = \dim E_i$ *,* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *et* $n = \sum_{i=1}^{r} p_i$. *où* $n = \dim E$

Proposition 6 *avec les notations précédentes :*

1. $\det(f) = \prod_{i=1}^{r} \det(f_i)$ *avec* $f_i = f_{/E_i}$
2. *Si* P_f *désigne le polynôme caractéristique de* f *alors* $P_f = \prod_{i=1}^{r} P_{f_i}$

1.2.3 Matrices diagonales

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et u un endomorphisme de E.

Proposition 7
La matrice de u *dans la base* $\mathcal{B}$ *est diagonale si et seulement si* $\mathcal{B}$ *est une base de* E *de vecteurs propres de* u.

1.2.4 Matrices triangulaires

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et u un endomorphisme de E. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$ on pose $E_k = \text{vect} < e_1, \dots, e_k >$ (espace vectoriel engendré par le système de vecteurs $(e_1, \dots, e_k)$)

Proposition 8
La matrice de u *dans la base* $\mathcal{B}$ *est triangulaire supérieure si et seulement si* $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \ u(E_k) \subset E_k$.

2 Polynômes d'un endomorphisme

2.1 Polynômes

2.1.1 Rappels

Théorème 1
Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X], \ P \neq 0$ *est scindé et se décompose de manière unique sous la forme :*
$P(X) = C \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ *où* $C \in \mathbb{C}$, *et* $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \ \lambda_i \in \mathbb{C}, \ \alpha_i \in \mathbb{N}^*$ *les* λ_i *distincts deux à deux.*

Les λ_i sont les racines de P et α_i est l'ordre de multiplicité de la racine λ_i. Si n est le degré de P on a $n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$

Théorème 2
Si P *et* Q *sont deux polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *premiers entre eux (ils n'ont pas de racine commune dans* $\mathbb{C}$)
Alors $\forall R \in \mathbb{K}[X]$ *on a :* P *divise* R *et* Q *divise* $R \Rightarrow PQ$ *divise* R.

Théorème 3 (Gauss) *Soit trois polynômes de* $\mathbb{K}[X], \ A, \ B, \ C$ *ona :*
$A \wedge B = 1$ *(c'est à dire* A *etB sont premiers entre eux) et* $A|BC$ *(*A *divise* BC*)* $\Rightarrow A|C$

Théorème 4 (Bezout) *Soit* A *et* B *deux polynômes de* $\mathbb{K}[X]$
A *et* B *sont premiers entre eux si et seulement si* $\exists (U, V) \ \mathbb{K}[X]^2$ *tel que* $UA + VB = 1$

2.1.2 Définition d'un idéal de $\mathbb{K}[X]$:

On appelle idéal de $\mathbb{K}[X]$, tout sous groupe I de $(\mathbb{K}[X], +)$ tel que $\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times I, \ PQ \in I$

2.1.3 Structure des idéaux de $\mathbb{K}[X]$

Proposition 9
Soit $I \subset \mathbb{K}[X]$, I *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$ *si et seulement si* $\exists P \in \mathbb{K}[X], \ I = P\mathbb{K}[X]$

Proposition 10
Si I *est un idéal non-nul de* $\mathbb{K}[X]$ *Alors il existe un unique polynôme unitaire* $P_0 \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $I = P_0\mathbb{K}[X]$

2.2 Polynômes d'endomorphismes

2.2.1 Morphisme d'algèbre

Pour $u \in L(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0$ on note $P(u)$ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $P(u) = a_d u^d + \ldots + a_1 u + a_0 \mathrm{I}_E$ où I_E désigne l'application identité de E.

Pour $P \in \mathbb{K}[\mathbb{X}]$, $\mathrm{Im}\, P(u)$ et $\ker P(u)$ sont stables par u

l'application $\varphi : P \mapsto P(u)$ est un homomorphisme d'algèbre de $(\mathbb{K}[X], +, \times, .)$ dans $(L(E), +, \circ, .)$

2.2.2 Idéal annulateur

Le noyau de φ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.
$\ker \varphi = \{0\}$ ou $\ker \varphi = P_m \mathbb{K}[X]$ avec P_m unitaire de degré m.
P_m est unique et est appelé le polynôme minimal de u.

Proposition 11
Si E *est de dimension finie* n*,* Alors $\ker \varphi \neq \{0\}$ *et* $m \leq n$

2.2.3 Théorème de décomposition des noyaux

Théorème 5 (Théorème de décomposition des noyaux)
Si P *et* Q *sont premiers entre eux et* $u \in L(E)$ **alors** $\ker P.Q(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$

Conséquence : les sous espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes sont en somme directe.
On déduit du théorème précédent :

Théorème 6
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \prod\limits_{i=1}^{r} P_i$ *avec* $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $P_i \in \mathbb{K}[\mathbb{X}]$ *et* $\forall (i,j) \in [\![1, r]\!]^2$, $i \neq j$, $P_i \wedge P_j = 1$
Alors $\ker P(u) = \mathop{\oplus}\limits_{i=1}^{r} \ker P_i(u)$

2.2.4 Image de φ

On note $\mathbb{K}[u]$ l'image de φ.

Proposition 12 $\mathbb{K}[u]$ *est une sous algèbre commutative de* $\mathcal{L}(E)$*.*

Proposition 13 Si E *est de dimension finie* n*,* Alors $\mathbb{K}[u]$ *est une sous-algèbre de* $\mathcal{L}(E)$ *de dimension finie inférieure ou égale à* n

2.3 Polynôme caractéristique :

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.
Définition :
on appelle polynôme caratéristique d'un endomorphisme f de $L(E)$ le déterminant $P_f(X) = \det(f - X\,\mathrm{I}_E)$

Propriétés :
- $P_f(X)$ est un polynôme de degré n
- $P_f(0) = \det f$
- $P_f(X) = (-1)^n (X^n - \mathrm{tr}(f) X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det f)$ où $\mathrm{tr}(f)$ désigne la trace de f.
- Si F est un sous espace vectoriel de E stable par f alors $P_{f_{/F}}$ divise P_f.
- Si $f \in L(E)$ et $E = \mathop{\oplus}\limits_{i=1}^{p} E_i$, E_i stable par f, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$, soit $f_i = f_{/E_i}$ Alors $P_f(X) = \prod\limits_{i=1}^{p} P_{f_i}(X)$

Théorème de Cayley-Hamilton :

Théorème 7
Si $f \in \mathcal{L}(E)$
Alors $P_f(f) = 0$, f *annule son polynôme caractéristique soit* $P_f \in \ker \varphi$.

Conséquence : le polynôme minimal de f divise son polynôme caractéristique : P_m/P_f

Si $P_c(f)(X) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$ **alors** $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(\lambda_i Id_E - f)^{\alpha_i}$

Les sous espaces vectoriels $\ker(\lambda_i Id_E - f)^{\alpha_i}$ s'appellent les sous espaces caractéristiques de f, ils sont stables par f et $\dim \ker(\lambda_i Id_E - f)^{\alpha_i}. = \alpha_i$.

La matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \ker(f - \lambda_i \mathrm{I}_E)^{\alpha_i}$ est une matrice par blocs.

3 Réduction d'endomorphismes

3.1 Valeurs propres-vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition 3 *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in L(E)$. On appelle valeur propre de f tout scalaire λ tel qu'il existe un vecteur non-nul x de E tel que $f(x) = \lambda.x$.*

Définition 4 Si λ *est une valeur propre de f on appelle sous espace propre de f l'espace* $\ker(f - \lambda.Id)$

Proposition 14 *Les sous espaces propres de f sont en somme directe*

Proposition 15
Si $e_1, \dots, e_p$ *sont p vecteurs propres de l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ associés à p valeurs propres distinctes*
Alors $(e_1, \dots, e_p)$ *est un système libre de E*

Proposition 16
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ *et $\vec{x}$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ*
Alors *pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $\vec{x}$ est un vecteur propre de $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$*

3.2 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie.

3.2.1 Valeurs propres vecteurs propres

Soit $f \in L(E)$ de polynôme caractéristique P_f, de polynôme minimal P_m et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 17 *λ est une valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda \mathrm{I}_E$ n'est pas inversible.*

Proposition 18 *λ est une valeur propre de f si et seulement si λ est racine de P_f.*

Proposition 19 *λ est une valeur propre de f si et seulement si λ est racine de P_m.*

Définition 5 *Si $P_f(X) = (X - \lambda)^{\alpha} Q(X)$ avec $Q(\lambda) \neq 0$, α est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.*

Proposition 20 *Si $f \in L(E)$ et λ est une valeur propre d'ordre de multiplicité α alors la dimension du sous-espace propre correspondant est inférieure ou égale à α.*

En dimension finie l'ensemble des valeurs propres de f est appelé spectre de u noté $\mathrm{Sp}(u)$
Propriétés :

- **Si** $P \in \mathbb{K}[X]$ et $P(u) = 0$ **alors** toute valeur propre de u est un zéro de P (la réciproque est fausse)
- **Si** F est un sous espace vectoriel stable par f **alors** $\mathrm{Sp}(f_{/F}) \subset \mathrm{Sp}(f)$
- **Si** le polynôme caractéristique de f, P_f est scindé, $P_f(X) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$, on a :

  $\mathrm{tr}(f) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda_i$ et $\det f = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{\alpha_i}$
- **Soit** $a \in GL(E)$, l'application $u \mapsto aua^{-1}$ est un automorphisme d'algèbre de $L(E)$. u et aua^{-1} ont le même polynôme caractéristique et les mêmes valeurs propres. *Si* E_λ est le sous espace propre associé à la valeur propre λ de u *alors* $a(E_\lambda)$ est le sous espace propre de aua^{-1} associé à la valeur propre λ.

3.2.2 Valeurs propres-vecteurs propres d'une matrice carrée

Les éléments propres de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont définis comme étant ceux de l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M (c'est à dire l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

Les valeurs propres, les sous-espaces propres, les vecteurs propres et le spectre d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé à M.

Un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut-être considéré comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; le spectre de M dans $\mathbb{R}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{C}$.

3.2.3 Endomorphismes diagonalisables

Soit E de dimension finie n

Définition 6
$f \in L(E)$ est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous espaces propres de f.

3.3 Diagonalisation

Proposition 21 $f \in L(E)$

1. *f est diagonalisable si et seulement si E admet une base de vecteurs propres de f.*
2. *f est diagonalisable si et seulement si E admet une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.*
3. *Soit $E_1, \cdots E_p$ les sous espaces propres de f.*
   f est diagonalisable si et seulement si $\dim E = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$.

Proposition 22
Si $f \in L(E)$ est un endomorphisme diagonalisable tel que $E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$ avec $E_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \mathrm{I}_{E_i})$ et p_{λ_i} est le projecteur sur E_{λ_i} parallèlement à $\underset{k \neq i}{\oplus} E_{\lambda_k}$.

Alors $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_{\lambda_i}$

Proposition 23 $f \in \mathcal{L}(E)$
Si E est somme directe de sous-espaces vectoriels stables E_j sur lesquels f induit une homothétie de rapport λ_j
Alors f est diagonalisable et $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_{\lambda_i}$ où p_{λ_i} le projecteur sur E_{λ_i} parallèlement à $\underset{k \neq i}{\oplus} E_{\lambda_k}$..

Proposition 24 *Pour qu'un endomorphisme u de E soit diagonalisable, il faut et il suffit que le polynôme caractéristique de u soit scindé dans $\mathbb{K}$ et que chaque sous-espace propre ait pour dimension l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.*

Proposition 25 *Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et n'a que des racines simples est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.*

Théorème 8 *Pour qu'un endomorphisme f de E soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples .*

Proposition 26 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$,*
f est diagonalisable si et seulement si f annule le polynôme $P(X) = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$

Remarque 1 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$,*
f est diagonalisable si et seulement si le polynôme minimal de f est $P_m(X) = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$

Proposition 27 *Si $u \in L(E)$, u est diagonalisable et F est un sous espace vectoriel stable par u*
Alors $u_{/F}$ est diagonalisable

Remarque 2 *Si $P(f) = 0$ où P n'a que des racines simples alors f est diagonalisable et les valeurs propres de f sont contenues dans les racines de P (mais ce ne sont pas nécessairement toutes les racines de P)*

Exemple 2 *Une homothétie de E de rapport λ avec $n = \dim E \geq 1$ est un endomorphisme diagonalisable dont la seule valeur propre est λ et le sous-espace propre associé est E,* $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$.

Exemple 3 *les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.*
En effet si p est un projecteur (resp. s est une symétrie) alors p (resp. s) annule le polynôme $X(X-1)$ (resp. $(X-1)(X+1)$)qui n'a que des racines simples de sorte que p (resp.s) est diagonalisable. Si $p \neq 0$ et $p \neq \mathrm{I}_E$ on a $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$, *si $s \neq \mathrm{I}_E$ et $s \neq -\mathrm{I}_E$ alors* $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, 1\}$

Exemple 4 *Si $E = E_1 \oplus E_2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on appelle affinité de base E_1 parallèlement à E_2 et de rapport α l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall x \in E$ avec $x = x_1 + x_2$, $(x_1, x_2) \in E_1 \oplus E_2$, $u(x) = x_1 + \alpha x_2$.*
En prenant une base adaptée à $E = E_1 \oplus E_2$, $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ base de E_1, $\mathcal{B}_2 = (e_{p+1}, \dots, e_n)$ base de E_2, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E de vecteur propres de u. Une affinité est un endomorphisme diagonalisable et si $E_1 \neq \{\vec{0}\}$, $E_2 \neq \{\vec{0}\}$, $\alpha \neq 1$, $\quad \mathrm{Sp}(u) = \{1, \alpha\}$ avec E_1 sous espace propre associé à 1 et E_2 sous espace propre associé à α.
Si p est la projection vectorielle sur E_1 parallèlement à E_2 on a $u = \alpha \, \mathrm{I}_E + (1 - \alpha)p$)

Exercice 1 *Soit p et q deux projecteurs non-nuls de E, $f \in L(E)$ et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ $a \neq b$, on suppose que*
$\mathtt{Id} = \mathtt{p} + \mathtt{q}$, $\mathtt{f} = \mathtt{ap} + \mathtt{bq}$, $\mathtt{f}^2 = \mathtt{a}^2\mathtt{p} + \mathtt{b}^2\mathtt{q}$.

1. *Calculer $(f - a\mathtt{Id}) \circ (\mathtt{f} - \mathtt{bId})$*
2. *En déduire que f est diagonalisable et déterminer en fonction de p et q les sous espaces propres de f.*

3.4 Trigonalisation

Définition 7 *Un endomorphisme $f \in L(E)$ est trigonalisable si et seulement si E admet une base dans laquelle la matrice de f est triangulaire.*

Remarque 3 *Si la matrice de f est triangulaire inférieure (resp.supérieure) dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$ elle est alors triangulaire supérieure (resp. inférieure) dans la base $(e_n, \cdots, e_1)$*

Théorème 9 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, f est trigonalisable si et seulement si le polynôme caractéristique de f est scindé dans $\mathbb{K}[X]$.*

Plus généralement :

Théorème 10 *Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si il annule un polynôme scindé.*

Remarque 4 *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors tout endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.*

3.5 Matrices

Définition 8 *Une matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp. trigonalisable) si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire).*
C'est à dire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D (resp. triangulaire T) telle que $M = PDP^{-1}$ (resp. $M = PTP^{-1}$)

Proposition 28
Une matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp. trigonalisable) si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M est diagonalisable (resp. trigonalisable).

Si M est diagonalisable alors P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de M.