ESPACES PREHILBERTIENS

Ce document n'est pas un cours mais présente seulement quelques notions à connaître sur le sujet.

1 Espaces préhilbertiens réels

1.1 Formes bilinéaires symétriques

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel

Définition 1
Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire sur E si :

1. $\forall x \in E,\ y \mapsto \varphi(x, y)$ *est linéaire*
2. $\forall y \in E,\ x \mapsto \varphi(x, y)$ *est linéaire*

Si de plus $\forall (x, y),\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ on dira que φ est symétrique.

Soit $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E et $\mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E.

Remarque 1
Une forme bilinéaire φ sur E qui vérifie $\forall (x, y),\ \varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$ est appelée une forme bilinéaire antisymétrique soit $\mathcal{L}_{a2}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E.

Exemple 1

- $E = \mathbb{R}^n$, *pour* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ *soit* $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k y_k \end{array}$, $\varphi \in \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$
- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ n \geq 1, \quad \varphi : (A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB), \quad \varphi \in \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$
- $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})\, a < b, \quad \varphi : (f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t, \quad \varphi \in \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$
- $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \quad \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\} \quad \varphi : (u, v) \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k v_k, \quad \varphi \in \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$
- $E = \mathbb{R}^2, \varphi : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto 2x_1 y_2 - x_2 y_1 \quad \varphi \in \mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$ *mais* $\varphi \notin \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$.

Proposition 1 *$\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et $\mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$*

Remarque 2
On aussi $\mathcal{L}_{a2}(E, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel et $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R}) = \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}_{a2}(E, \mathbb{R})$

1.2 Formes quadratiques

Définition 2
On appelle forme quadratique sur E toute application $Q : E \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique φ telle que : $\forall x \in E,\ Q(x) = \varphi(x, x)$.
Q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique φ.

1.2.1 Propriétés

1. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \quad Q(\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot Q(x)$
2. $\forall (x, y) \in E^2, \quad Q(x + y) = Q(x) + 2\varphi(x, y) + Q(y)$
3. Soit $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E
   - $(\mathcal{Q}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
   - $\begin{array}{ccc} (\mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R}), +, \cdot) & \to & (\mathcal{Q}(E), +, \cdot) \\ \varphi & \mapsto & Q \end{array}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

- $Q(x+y)=Q(x)+Q(y)+2\varphi(x,y)$
  $Q(x+y)+Q(x-y)=2(Q(x)+Q(y))$
  $Q(x+y)-Q(x-y)=4\varphi(x,y)$
  $\varphi(x,y)=\dfrac{1}{2}(Q(x+y)-Q(x)-Q(y))$
  $\varphi(x,y)=\dfrac{1}{4}(Q(x+y)-Q(x-y))$
  (identités de polarisation)

4. Q est la forme quadratique associée à φ
5. φ est la forme polaire associée à Q

Exemple 2

- *Pour* $f\in E^*$, $\quad f^2\in\mathcal{Q}(E)$ *de forme polaire associée* $(x,y)\mapsto f(x)f(y)$
- *Pour* $(f_1,f_2)\in(E^*)^2$, $\quad f_1\times f_2\in\mathcal{Q}(E)$ *et la forme polaire associée est définie par :*
  $(x,y)\mapsto\dfrac{1}{2}[f_1(x)\cdot f_2(y)+f_1(y)\cdot f_2(x)]$
- $Q:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}\\ P & \mapsto & \int_0^1 P(t)P''(t)\mathrm{d}t\end{array}$, $Q\in\mathcal{Q}(E)$ *de forme polaire associée :*
  $(P,Q)\mapsto\dfrac{1}{2}\left(\int_0^1 P(t)Q''(t)+P''(t)Q(t)\mathrm{d}t\right)$

1.3 Formes bilinéaires symétriques de signe constant

Définition 3
Soit $\varphi\in\mathcal{L}_{s2}(E,\mathbb{R})$ *de forme quadratique associée* Q*, on dit que :*

1. φ *(resp.* Q*) est positive si* $\forall x\in E,\ \varphi(x,x)\geq 0$
2. φ *(resp.* Q*) est définie positive si* $\forall x\in E\setminus\{\vec{0}\},\ \varphi(x,x)>0$

Théorème 1 (inégalité de Cauchy Schwarz)

- *Si* φ *est une forme bilinéaire symétrique positive sur* E *alors* $\forall(x,y)\in E^2,\ \mid\varphi(x,y)\mid\leq\sqrt{Q(x)}\sqrt{Q(y)}$
- *Si, de plus,* φ *est définie positive, l'égalité a lieu si et seulement si* (x,y) *est une famille liée.*

1.4 Formes quadratiques en dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimenson finie, $\dim E=n,\ n\geq 1$, et $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ une base de E.

Pour $\varphi\in\mathcal{L}_{s2}(E,\mathbb{R})$, posons $A_\varphi=(\varphi(e_i,e_j))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$, on a $A_\varphi\in\mathcal{M}_{sn}(\mathbb{R})$ (espace vectoriel des matrices symétriques carrée d'ordre n), $\quad A_\varphi$ est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$,

Pour $\vec{x}\in E$ notons X le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$, $\vec{x}=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\vec{e}_k$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

On a : $\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2,\ \varphi(\vec{x},\vec{y})={}^tXA_\varphi Y$

Proposition 2
L'application : $\begin{array}{ccc}\mathcal{L}_{s2}(E,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{sn}(\mathbb{R})\\ \varphi & \mapsto & A_\varphi\end{array}$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Changement de base :
Soit $\mathcal{B}_1=(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n)$ une autre base de E et P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$, P est la matrice des coordonnées des vecteurs $(\vec{u}_i)$ dans la base $\mathcal{B}$. Soit $A_{1\varphi}$ la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_1$, on a :

$$A_{1\varphi}={}^tPAP$$

1.5 Espaces préhilbertiens réels

1.5.1 Définition

Définition 4
Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, on appelle produit scalaire sur E une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.

Définition 5
On appelle espace préhilbertien réel un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $<,>$.
$<,>\in \mathcal{L}_{s2}(E,\mathbb{R})$ et $<,>$ est définie positive.

Définition 6
On appelle espace euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Exemple 3

1. $(\mathbb{R}^n,<,>)$ *avec* $<(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)>=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$*, est un espace euclidien*
2. $(\mathcal{M}_{n,p},<,>)$ *avec* $\forall (A,B)\in \mathcal{M}_{n,p}(R)^2 \ \ <A,B>=\mathrm{tr}({}^tAB)$*, est un espace euclidien.*
3. *Pour I intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle, soit $\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications continues sur I et de carré intégrable sur I, on pose pour $(f,g)\in \mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})^2$, $<f,g>=\int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t$, $(\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R}),<,>)$, est un espace préhilbertien réel.*
4. *Soit $\ell^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable, on pose pour $(u,v)\in \ell^2(\mathbb{R})^2$,*
   $<u,v>=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$, *$(\ell^2(\mathbb{R}),<,>)$ est un espace préhilbertien réel.*

1.5.2 Propriétés du produit scalaire

Soit $(E,<,>)$ un espace préhilbertien réel, pour $x\in E$ on pose $\| x \|=\sqrt{<x,x>}$.
Pour $(x,y)\in E^2$:

- $|<x,y>|\leq \| x \| . \| y \|$ (inégalité de Cauchy Schwarz) avec égalité si et seulement si (x,y) est lié.
- $(E,\| \ \ \|)$ est un espace vectoriel normé
- $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2<x,y>+\|y\|^2$
- $\| x+y \|^2+\| x-y \|^2=2(\| x \|^2+\| y \|^2)$ (identité du parallélogramme)
- Pour $(a,b,c)\in E^3$, $\| a-b \|^2+\| a-c \|^2=2\, \| a-\dfrac{b+c}{2} \|^2+\dfrac{1}{2}\, \| b-c \|^2$ (identité de la médiane)
- Identités de polarisation :
  $<x,y>=\dfrac{1}{2}(\| x+y \|^2-\| x \|^2-\| y \|^2)$
  $<x,y>=\dfrac{1}{4}(\| x+y \|^2-\| x-y \|^2)$

1.5.3 Orthogonalité

Soit $(E,<,>)$ un espace préhilbertien réel

Définition 7

- *Deux éléments x et y de E sont orthogonaux si $<x,y>=0$, on note $x\perp y$*
- *Si $A\subset E$ et $x\in E$, on dit que x est orthogonal à A si x est orthogonal à tous les vecteurs de A, on note A° ou $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à A, $A^\perp=\{x\in E,\ \forall y\in A,\ <x,y>=0\}$*

Proposition 3

- *Si $A\subset E$ Alors $A^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de E*
- *Si $A\subset E$ Alors $A^\perp=(\mathrm{vect}<A>)^\perp$*

Théorème 2

- *Si $(x,y)\in E^2$ Alors* $x\perp y \Leftrightarrow \| x+y \|^2=\| x \|^2+\| y \|^2$
- *Si $x_1,\ldots,x_n$ sont n vecteurs de E orthogonaux deux à deux Alors* $\| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \|^2=\sum\limits_{k=1}^{n} \| x_k \|^2$

Définition 8

- *Une famille $(x_i)_{i\in I}\in E^I$ est une famille orthogonale si $\forall (i,j)\in I^2$, $i\neq j$, $<x_i,x_j>=0$*
- *Une famille $(x_i)_{i\in I}\in E^I$ est une famille orthonormée si $\forall (i,j)\in I^2$, $i\neq j$, $<x_i,x_j>=0$ et $\| x_i \|=1$*

Proposition 4
Une famille orthogonale de vecteurs non-nuls est une famille libre

Proposition 5
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une famille orthonormée de vecteurs de* E*, soit* $F = \mathrm{vect} < \mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n} >$ *Alors*

- $\forall x \in F,\ x = \sum\limits_{k=1}^{n} < e_k, x > e_k$
- $\forall (x, y) \in F^2,\ < x, y >= \sum\limits_{k=1}^{n} < e_k, x >< e_k, y >$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(u_k)_{k\in I}$ une famille libre de E avec $I = [\![0, n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{N}$. On pose pour $p \in I,\ E_p = \mathrm{vect} < u_0, \ldots, u_p >$. Le procédé permet de construire une famille $(e_k)_{k\in I}$ orthonormée de E telle que :
$\forall p \in I, \mathrm{vect} < e_0, \ldots, e_p >= \mathrm{vect} < u_0, \ldots, u_p >$

Etape 1 On construit par récurrence une famille orthogonale $(v_k)_{k\in\mathbb{I}}$:

- $v_0 = u_0$
- Pour $p \in I$, supposons construit , $v_0, \ldots, v_{p-1}$, au rang p :

$$v_p = u_p + \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k v_k \text{ avec } \forall k \in [\![0, p-1]\!], < v_k, v_p >= 0\,,\ \text{soit } \lambda_k = -\frac{< v_k, u_p >}{< v_k, v_k >}$$

Etape 2 Pour $k \in I$ on pose $e_k = \dfrac{1}{\| v_k \|} \cdot v_k$.

Conséquence :

Théorème 3

- *Un espace euclidien possède des bases orthonormées*
- *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien complexe possède des bases orthonormées.*

1.5.4 Projection orthogonale

Proposition 6
Si F *est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel* E *Alors* F *et* $F^\perp$ *sont en somme directe.*
On dit que F *et* $F^\perp$ *sont en somme directe orthogonale, on note* $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$

Théorème 4 (sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux)
Si F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace préhilbertien réel* E *on a équivalence entre les propositions suivantes :*

- F *et* G *sont orthogonaux*
- $F^\perp = G$
- $G^\perp = F$

dans ces conditions on dit que F *et* G *sont supplémentaires orthogonaux,* $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Définition 9
Soit E *un espace préhilbertien réel et* p *une projection sur un sous-espace vectoriel* F *parallèlement à un sous-espace vectoriel* G*, on dit que* p *est une projection orthogonale si* F *et* G *sont orthogonaux.*

Proposition 7
Soit E *un espace préhilbertien réel et* $E_1, \ldots, E_r$*,* r *sous-espaces vectoriels de* E *orthogonaux 2 à 2 tels que* $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$*, on note alors* $E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} E_r$.
Pour $k \in [\![1, r]\!]$ *on a* $E_k^\perp = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\substack{1\leq i\leq r\\ i\neq k}}} E_i$ *et si* p_k *est la projection orthogonale sur* E_k *:*

- $p_1 + \ldots + p_r = \mathrm{Id}_E$
- $\forall (i, j) \in [\![1, r]\!]^2,\ i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$

Théorème 5 (projection orthogonale)
Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie d'un préhilbertien réel E et si $x \in E$
Alors il existe un unique vecteur $p_F(x) \in F$ tel que $d(x,F) = \| x - p_F(x) \|$
$x \mapsto p_F(x)$ est une application de E dans E qui vérifie :

1. *$\forall x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$,*
   $p_F(x)$ s'appelle le projeté orthogonal de x sur F
2. *$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ et p_F est la projection orthogonale sur F,*
   p_F est continue et pour la norme subordonnée à la norme euclidienne de E, $\| p_F \| = 1$
3. *$\left(F^\perp\right)^\perp = F$*
4. *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F, $\forall x \in E$, $p_F(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} < e_k, x > e_k$*

On aussi :
- $\forall x \in E, \quad \mathrm{d}(x,F)^2 = \| x \|^2 - \| p_F(x) \|^2$
- **Inégalité de Bessel :**
  - $\forall x \in E, \quad \| p_F(x) \| \leq \| x \|$
  - Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormée de E alors $\forall x \in E, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} |< e_k, x >|^2 \leq \| x \|^2$

2 Espaces préhilbertiens complexes

Dans ce paragraphe E désigne un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

2.1 Produit scalaire hermitien

Définition 10
On appelle produit scalaire hermitien sur sur E une application $< \, , \, >$ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ telle que :

1. *$\forall x \in E$, $y \mapsto < x, y >$ est linéaire (linéarité à droite)*
2. *$\forall (x,y) \in E^2$, $< y, x > = \overline{< x, y >}$ (symétrie hermitienne)*
3. *$\forall x \in E \setminus \{0\}$, $< x, x > > 0$ (définie positive)*

Remarque 3

1. *$\forall x \in E$, l'application $\varphi_x : y \mapsto < y, x >$ vérifie :*
   - $\forall (y_1, y_2) \in E^2$, $\varphi_x(y_1 + y_2) = \varphi_x(y_1) + \varphi_x(y_2)$
   - $\forall (\lambda, y) \in \mathbb{C} \times E$, $\varphi_x(\lambda y) = \bar{\lambda} \varphi_x(y)$

   On dit que φ_x est semi-linéaire.
2. *$\forall x \in E$, $< x, 0 > = < 0, x > = 0$*

Définition 11
On appelle espace préhilbertien complexe un $\mathbb{C}$ espace vectoriel E muni d'un produit scalaire hermitien $< \, , \, >$.

Définition 12
On appelle espace hermitien un espace préhilbertien complexe de dimension finie.

Exemple 4

1. *$(\mathbb{C}^n, < \, , \, >)$ avec $< (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) > = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{x_k}.y_k$, est un espace hermitien.*
2. *$(\mathcal{M}_{n,p}, < \, , \, >)$ avec $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(C)^2$ $< A, B > = \mathrm{tr}({}^t\bar{A}B)$, est un espace hermitien.*
3. *Pour I intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle, soit $\mathcal{L}_c^2(I, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des applications continues sur I et de carré intégrable sur I, on pose pour $(f,g) \in \mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{C})^2$, $< f, g > = \int_I \overline{f(t)}.g(t)\mathrm{d}t$,*
   $(\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{C}), < \, , \, >)$, est un espace préhilbertien complexe.
4. *Soit $\ell^2(\mathbb{C}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\}$ le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des suites complexes de module au carré sommable, on pose pour $(u,v) \in \ell^2(\mathbb{C})^2, < u, v > = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \overline{u_k}.v_k$,*
   $(\ell^2(\mathbb{C}), < \, , \, >)$ est un espace préhilbertien complexe.

Dans la suite $(E, < \, , \, >)$ désigne un espace préhilbertien complexe

2.1.1 Propriétés du produit scalaire

Pour $x \in E$ on pose $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$.
Pour $(x, y) \in E^2$:

- $| < x, y > | \leq \| x \| . \| y \|$ (inégalité de Cauchy Schwarz) avec égalité si et seulement si (x,y) est lié.
- $(E, \| \quad \|)$ est un espace vectoriel normé
- $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + 2\mathrm{Re}(< x, y >) + \| y \|^2$
- $\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2)$ (identité du parallélogramme)
- Pour $(a, b, c) \in E^3$, $\| a - b \|^2 + \| a - c \|^2 = 2 \| a - \dfrac{b + c}{2} \|^2 + \dfrac{1}{2} \| b - c \|^2$ (identité de la médiane)
- Identité de polarisation :
  $< x, y > = \dfrac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 - i \| x + iy \|^2 + i \| x - iy \|^2)$

2.1.2 Orthogonalité

Définition 13

- *Deux éléments x et y de E sont orthogonaux si $< x, y > = 0$, on note $x \perp y$*
- *Si $A \subset E$ et $x \in E$, on dit que x est orthogonal à A si x est orthogonal à tous les vecteurs de A, on note A° ou $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à A, $A^\perp = \{x \in E, \forall y \in A, < x, y > = 0\}$*

Proposition 8

- *Si $A \subset E$ Alors $A^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de E*
- *Si $A \subset E$ Alors $A^\perp = (\mathrm{vect} < A >)^\perp$*

Théorème 6

- *Si $(x, y) \in E^2$ et $x \perp y$ Alors $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$*
- *Si $(x, y) \in E^2$ Alors $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(< x, y >) = 0$.*
- *Si $x_1, \ldots, x_n$ sont n vecteurs de E orthogonaux deux à deux Alors $\| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \| x_k \|^2$*

Définition 14

- *Une famille $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est une famille orthogonale si $\forall (i, j) \in I^2$, $i \neq j$, $< x_i, x_j > = 0$*
- *Une famille $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est une famille orthonormée si $\forall (i, j) \in I^2$, $i \neq j$, $< x_i, x_j > = 0$ et $\| x_i \| = 1$*

Proposition 9

Une famille orthogonale de vecteurs non-nuls est une famille libre

Proposition 10

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormée de vecteurs de E, soit $F = \mathrm{vect} < \mathrm{e_1}, \ldots, \mathrm{e_n} >$ Alors

- $\forall x \in F$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n} < e_k, x > e_k$
- $\forall x \in F$, $\| x \|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} | < e_k, x > |^2$
- $\forall (x, y) \in F^2$, $< x, y > = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{< e_k, x >} < e_k, y >$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(u_k)_{k \in I}$ une famille libre de E avec $I = [\![0, n]\!]$, $n \in \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{N}$. On pose pour $p \in I$, $E_p = \mathrm{vect} < u_0, \ldots, u_p >$.
Le procédé permet de construire une famille $(e_k)_{k \in I}$ orthonormée de E telle que :
$\forall p \in I, \mathrm{vect} < e_0, \ldots, e_p > = \mathrm{vect} < u_0, \ldots, u_p >$

Etape 1 On construit par récurrence une famille orthogonale $(v_k)_{k \in \mathbb{I}}$:

- $v_0 = u_0$
- Pour $p \in I$, supposons construit , $v_0, \ldots, v_{p-1}$, au rang p :
  $v_p = u_p + \sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k v_k$ avec $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $< v_k, v_p > = 0$, soit $\lambda_k = -\dfrac{< v_k, u_p >}{< v_k, v_k >}$

Etape 2 Pour $k \in I$ on pose $e_k = \dfrac{1}{\| v_k \|} \cdot v_k$.

Conséquence :

Théorème 7

- *Un espace hermitien possède des bases orthonormées*
- *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien complexe possède des bases orthonormées.*

2.1.3 Projection orthogonale

Proposition 11

Si F est un sous-espace vectoriel de E Alors F et $F^\perp$ sont en somme directe.

On dit que F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale, on note $F\overset{\perp}{\oplus}F^\perp$

Théorème 8 (sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux)

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace préhilbertien complexe E on a équivalence entre les propositions suivantes :

- *F et G sont orthogonaux*
- *$F^\perp = G$*
- *$G^\perp = F$*

dans ces conditions on dit que F et G sont supplémentaires orthogonaux, $E = F\overset{\perp}{\oplus}G$.

Définition 15

Soit p une projection vectorielle de E sur un sous-espace vectoriel F parallèlement à un sous-espace vectoriel G, on dit que p est une projection orthogonale si F et G sont orthogonaux.

Proposition 12

Soit $E_1, \dots, E_r$, r sous-espaces vectoriels de E orthogonaux 2 à 2 tels que
$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$, on note alors $E = E_1\overset{\perp}{\oplus}\dots\overset{\perp}{\oplus}E_r$.
Pour $k \in [\![1, r]\!]$ on a $E_k^\perp = \overset{\perp}{\underset{\substack{1\leq i\leq r\\ i\neq k}}{\bigoplus}} E_i$ et si p_k est la projection orthogonale sur E_k :

- $p_1 + \dots + p_r = \mathrm{Id}_E$
- $\forall (i,j) \in [\![1, r]\!]^2,\ i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$

Théorème 9 (projection orthogonale)

Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie de E et si $x \in E$
Alors il existe un unique vecteur $p_F(x) \in F$ tel que $d(x, F) = \| x - p_F(x) \|$
$x \mapsto p_F(x)$ est une application de E dans E qui vérifie :

1. *$\forall x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$,*
   $p_F(x)$ s'appelle le projeté orthogonal de x sur F
2. *$E = F\overset{\perp}{\oplus}F^\perp$ et p_F est la projection orthogonale sur F,*
   p_F est continue et pour la norme subordonnée à la norme hermitienne de E, $\| p_F \| = 1$
3. *$\left(F^\perp\right)^\perp = F$*
4. *Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de F, $\forall x \in E$, $p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} < e_k, x > e_k$*

On aussi :

- $\forall x \in E,\quad \mathrm{d}(x, F)^2 = \| x \|^2 - \| p_F(x) \|^2$
- **Inégalité de Bessel :**
  - $\forall x \in E,\quad \| p_F(x) \| \leq \| x \|$
  - Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée de E alors $\forall x \in E,\quad \sum_{k=1}^{n} |< e_k, x >|^2 \leq \| x \|^2$