INTEGRATION

Ce document n'est pas un cours mais présente seulement quelques notions à connaître sur le sujet.

Si f est une fonction numérique continue sur un segment $[a,b]$ et F est une primitive de f sur $[a,b]$ on notera

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

A partir de l'intégrale des fonctions sur un segment il s'agit de définir et d'étudier les propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque.

1 Fonctions continues par morceaux

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1.1 Subdivisions

Définition 1 *: On appelle subdivision d'un segment $[a,b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$.*

1.2 Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition 2 *Une application $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ de $[a,b]$ telle que $\forall k \in \{0,\cdots,n-1\}$, f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$ et se prolonge par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.*

On notera f_k la fonction continue définie sur $[x_k, x_{k+1}]$ par :
$f_k(x) = f(x)$ *si* $x \in]x_k, x_{k+1}[$, $f_k(x_k) = \lim\limits_{x\to x_k^+} f(x)$, $f_k(x_{k+1}) = \lim\limits_{x\to x_{k+1}^-} f(x)$

Définition 3 *Une application $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur $[a,b]$ ($p \in \mathbb{N}$, ou $p = \infty$) s'il existe une subdivision $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ de $[a,b]$ telle que $\forall k \in \{0,\cdots,n-1\}$, f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $]x_k, x_{k+1}[$ et se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[x_k, x_{k+1}]$.*

Propriété 1

1. *Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée*
2. *Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(t)dt$,*

   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k(t)dt$ ne dépend pas de la subdivision $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$ de $[a,b]$

1.3 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition 4 *Soit I un intervalle, une application $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur I si f est continue par morceaux sur tout segment de I.*

Soit $\mathcal{C}_m(I)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$

Proposition 1 *$(\mathcal{C}_m(I), +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$ algèbre*

1.4 Fonctions en escalier

Définition 5 *Une application $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est une fonction escalier sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n}$ de $[a,b]$ telle que, $\forall k \in \{0,\ldots,n-1\}$, f est constante sur l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$.*
σ est une subdivision associée à f.

Si on désigne par $\chi_{]a_k,a_{k+1}[}$ la fonction caractéristique de $]a_k, a_{k+1}[$, c'est à dire la fonction définie par :
$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in]a_k, a_{k+1}[\\ 0 & \text{si} \quad x \notin]a_k, a_{k+1}[\end{cases}$ et par λ_k la valeur de f sur l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, on a :

$$\forall x \in [a,b],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k . \chi_{]a_k,a_{k+1}[}(x) + \sum_{k=0}^{n} f(a_k)\chi_{\{a_k\}}(x).$$

Définition 6 *Soit I un intervalle et f une application de I dans $\mathbb{K}$. f est dite en escalier s'il existe un segment $[a,b] \subset I$ tel que $f_{[a,b]}$ soit une fonction en escalier sur $[a,b]$ et f est nulle en dehors de $[a,b]$.*

Propriété 2 *Soit $E(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur I, $E(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur I.*

Remarque 1
$E(I,\mathbb{K})$ est aussi un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur I.

1.5 Théorèmes d'approximation

- **Théorème 1** *Pour toute fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, il existe une suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

- **Théorème 2** *Pour toute fonction f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, il existe une suite $(\varphi_n)_n$ de fonctions continues et affines par morceaux sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

- **Théorème 3 (approximation de Weierstrass)** *Pour toute fonction f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, il existe une suite $(P_n)_n$ de fonctions polynômes qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

- Pour $T > 0$, soit $\mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont T-périodiques.

  Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $\forall k \in \mathbb{Z},\ -n \leq k \leq n\,,\ a_k \in \mathbb{C}$, la fonction P définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\frac{2\pi}{T}t}$ est appelée polynôme trigonométrique de période T.
  Théorème 4 (approximation de Weierstrass trigonométrique) *Pour toute fonction f de $\mathcal{C}_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ il existe une suite de polynômes trigonométriques de période T qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

2 Intégrale d'une fonction sur un intervalle

2.1 Intégrale des fonctions positives

Définition 7 *Soit I un intervalle et $f \in \mathcal{C}_m(I)$, on suppose $f \geq 0$. On dira que f est intégrable sur I si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall\, [a,b] \subset I,\ 0 \leq \displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq M$.*

On appellera intégrale de f sur I et on notera $\displaystyle\int_I f$ ou $\displaystyle\int_I f(t)dt$ le réel $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t = \sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b f(t)dt$

2.2 Propriétés de l'intégrale des fonctions positives

1. **Proposition 2**
   Si f est continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$
   Alors f est intégrable sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$
   D'autre part f est intégrable sur les intervalles $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$ et
   $\displaystyle\int_{]a,b]} f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t = \int_{]a,b[} f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t$
2. **Proposition 3**
   Soit I un intervalle et f une fonction à valeurs réelles positives continue par morceaux sur I.
   S'il existe une suite croissante $(J_n)_n$ de segments dont la réunion est égale à I et telle que
   $\exists M \geq 0,\ \forall n,\ \displaystyle\int_{J_n} f(t)\mathrm{d}t \leq M$
   Alors f est intégrable sur I et pour toute suite $(J_n)_n$ du type précédent
   $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t = \sup_n \int_{J_n} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f(t)\mathrm{d}t$
3. **Intégrales sur $I = [\alpha,\beta[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$**
   (on adaptera les propriétés pour un intervalle $I =]\alpha,\beta]$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\beta \in \mathbb{R}$)
   Soit $f \in \mathcal{C}_m(I)$, $f \geq 0$

(a) *f est intégrable sur I si et seulement si la fonction $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ est majorée sur $[\alpha,\beta[$, on a alors $\int_I f(t)dt=\lim_{x->\beta}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$*

(b) *Pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $\forall n\in N,\ x_n\in[\alpha,\beta[$ et $\lim_{n->+\infty} x_n=\beta$ on a :*
f est intégrable sur I si et seulement si $\left(\int_{\alpha}^{x_n} f(t)dt\right)_{n\geq 0}$ est majorée et $\int_I f(t)dt=\lim_{n->+\infty}\int_{\alpha}^{x_n} f(t)dt$

(c) *Si $0\leq f\leq g$ où f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur I et g est intégrable sur I Alors f est intégrable sur I et $0\leq \int_I f(t)dt \leq . \int_I g(t)dt.$*

(d) $\forall c\in I,\ f$ *est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur* $[c,\beta[$ et *alors* $\int_I f(t)dt = \int_{[\alpha,c]} f(t)dt+\int_{[c,\beta[} f(t)dt$

(e) Si f est continue, positive et intégrable sur I alors $\int_I f(t)\mathrm{d}t=0 \Leftrightarrow \forall t\in I,\ f(t)=0$

(f) Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux, positives et intégrables sur I et $\lambda\in\mathbb{R}^+$ alors $f+\lambda g$ est intégrable sur I et $\int_I (f+\lambda g)(t)\mathrm{d}t=\int_I f(t)\mathrm{d}t+\lambda\int_I g(t)\mathrm{d}t$

4. **Intégrales sur $I=]\alpha,\beta[$ avec $(\alpha,\beta)\in\overline{\mathbb{R}}^2$**
Soit f *une application continue par morceaux de I dans $\mathbb{R}^+$.*

(a) *Soit $c\in]\alpha,\beta[$, f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur $]\alpha,c]$ et sur $[c,\beta[$, on a alors $\int_I f(t)dt=\int_{]\alpha,c]} f(t)dt+\int_{[c,\beta[} f(t)dt$*

(b) Soit $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n\in\mathbb{N},\ (x_n,y_n)\in]\alpha,\beta[^2,\ \lim_{n->+\infty} x_n=\alpha,\ \ \lim_{n->+\infty} y_n=\beta$
f est intégrable sur I si et seulement si $\left(\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt\right)_{n\geq 0}$ est majorée et $\int_I f(t)dt=\lim_{n->+\infty}\int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$

(c) *Si $0\leq f\leq g$ où f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur I et g est intégrable sur I Alors f* est intégrable *sur I et $0\leq \int_I f(t)dt \leq . \int_I g(t)dt.$*

(d) Si f est continue, positive et intégrable sur I alors $\int_I f(t)\mathrm{d}t=0 \Leftrightarrow \forall t\in I,\ f(t)=0$

(e) Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux, positives et intégrables sur I et $\lambda\in\mathbb{R}^+$ alors $f+\lambda g$ est intégrable sur I et $\int_I (f+\lambda g)(t)\mathrm{d}t=\int_I f(t)\mathrm{d}t+\lambda\int_I g(t)\mathrm{d}t$

5. **Exemples à connaître :**

(a) $f(t)=\dfrac{1}{t^{\alpha}},\ I=]0,1],$ *f est intégrable sur I si et seulement si $\alpha<1$.*

(b) $f(t)=\dfrac{1}{t^{\alpha}},\ I=[1,+\infty[,$ *f est intégrable sur I si et seulement si $\alpha>1$*

(c) $f(t)=e^{-at},\ I=[0,+\infty[,$ *f est intégrable sur I si et seulement si $a>0$*

2.3 Intégrale de fonctions à valeurs réelles

Soit $f\in\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$, où I est un intervalle quelconque.

Définition 8 *f est intégrable sur I si et seulement si $|f\,|$ est intégrable sur I.*

Soit $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et intégrable sur I.

Proposition 4
$\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{R})$

Posons : $f^+=\sup(f,0)$ et $f^-=\sup(-f,0)$, on a $f=f^+-f^-$ et $|f|=f^++f^-$

Remarque 2
$f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ *et* $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$

Proposition 5 $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ *si et seulement si* $f^{\,+} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ *et* $f^{\,-} \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$

Définition 9 *Si* $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ *on appelle intégrale de* f *sur* I *le réel noté* $\displaystyle\int_I f$ *ou* $\displaystyle\int_I f(t)dt$ *défini par :*

$$\int_I f(t)dt = \int_I f^{\,+}(t)dt - \int_I f^{\,-}(t)dt$$

2.4 Intégrale de fonctions complexes

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, $f = f_1 + if_2$ avec $f_1 = Re(f)$ et $f_2 = Im(f)$

Définition 10
f est intégrable sur I si $|f| \in \mathcal{L}^1(I)$

Soit $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions complexes, continues par morceaux et intégrables sur I.

Proposition 6
f est intégrable sur I si et seulement si $Re(f) \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ *et* $Im(f) \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$

Définition 11 *Soit* $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$
On appelle intégrale de f sur I le complexe $\displaystyle\int_I f = \int_I f_1 + i\int_I f_2$

Proposition 7
$\mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$ *est un* $\mathbb{C}$ *espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{C})$

2.5 Propriétés de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$

1. Si $I = [a, b]$, *et* $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ alors $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$
2. $(\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}^1(I) & \rightarrow & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_I f \end{array}$ est une forme linéaire.
3. $I = [\alpha, \beta[$, *avec* $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ (on adaptera les propriétés pour un intervalle $I =]\alpha, \beta]$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\beta \in \mathbb{R}$)
   (a) Soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$, $g \geq 0$
   Si au voisinage de β on a $|f| \leq g$ ou $f = o(g)$ ou $f = O(g)$ ou $|f| \sim g$ alors $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$
   (b) Si $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ Alors $\displaystyle\int_I f(t)dt = \lim_{x->\beta} \int_\alpha^x f(t)dt$
   (c) Si $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ et $(x_n)_n$ est une suite de I avec $\displaystyle\lim_{n->+\infty} x_n = \beta$ *Alors* $\displaystyle\int_I f(t)dt = \lim_{n->+\infty} \int_\alpha^{x_n} f(t)dt$
   (d) Si $c \in I$ Alors $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^1([c, \beta[, \mathbb{K})$
   et alors $\displaystyle\int_I f(t)dt = \int_{[\alpha,c]} f(t)dt + \int_{[c,\beta[} f(t)dt$
4. $I =]\alpha, \beta[$, avec $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, soit $f \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{K})$ et $c \in I$
   (a) $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^1(]\alpha, c], \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}^1([c, \beta[, \mathbb{K})$,
   on a alors $\displaystyle\int_I f(t)dt = \int_{]\alpha,c]} f(t)dt + \int_{[c,\beta[} f(t)dt$
   (b) Si $|f\,| \leq g$ sur I et $g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ Alors $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$
   (c) Si $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$, $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites de I telles que $\displaystyle\lim_{n->+\infty} x_n = \alpha$ et $\displaystyle\lim_{n->+\infty} y_n = \beta$ Alors
   $\displaystyle\int_I f(t)dt = \lim_{n->+\infty} \int_{x_n}^{y_n} f(t)dt$
5. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})^2$, où I est un intervalle quelconque.

(a) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, et $f \leq g$ *sur* I *Alors* $\displaystyle\int_I f \leq \int_I g$

(b) $\displaystyle|\int_I f \,| \leq \int_I |f\,|$

(c) Si J est un intervalle contenu dans I Alors $f \in \mathcal{L}^1(J)$ et $\displaystyle\int_J f(t)\mathrm{d}t = \int_I f(t)\cdot\chi_J(t)\mathrm{d}t$ avec :

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in J \\ 0 & \text{si} \quad t \notin J \end{cases}$$

(d) Si J est un intervalle tel que $\overset{\circ}{I} \subset J \subset I$ *Alors* $f \in \mathcal{L}^1(J)$ et $\displaystyle\int_J f = \int_I f$ avec

si I est d'extrémités $\alpha,\ \beta$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, $\quad \overset{\circ}{I} =]\alpha,\beta[$

(e) Si $h \in \mathcal{C}_m(\mathcal{I})$ avec $h=f$ sur I sauf en un nombre fini de points Alors $h \in \mathcal{L}^1(I)$ et $\displaystyle\int_I h = \int_I f$

(f) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, alors $\min(f,g) \in \mathcal{L}^1(I)$, $\max(f,g) \in \mathcal{L}^1(I)$

3 Intégrales impropres convergentes

3.1 Définitions

Définition 12 *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ *avec* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ *et* $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ *continue par morceaux sur* I.
On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est une intégrale convergente si et seulement si* $\displaystyle\lim_{\substack{x\to b\\ a<x<b}} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}$.
On note $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to b\\ a<x<b}} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.
$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est une intégrale généralisée en* b*, on dit aussi intégrale impropre en* b*.*

On note aussi : $\displaystyle\int_b^a f(t)\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

Proposition 8
Si $f : [a,b[\to \mathbb{K}$*, avec* $(a,b) \in \mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ *est définie, continue par morceaux sur* $[a,b[$ *et* $f \in \mathcal{L}^1([a,b[)$
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est une intégrale convergente et* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{[a,b[} f(t)\mathrm{d}t$.

Proposition 9 *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$, $a<b$ *et* $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ *continue par morceaux et* $c \in [a,b[$:
$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge et lorsqu'il y a convergence :*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

Extension de la définition aux intervalles $]a,b]$ **et** $]a,b[$

Définition 13 *On définit de même pour* $f :]a,b] \to \mathbb{K}$ *continue par morceaux :* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{\substack{x\to a\\ a<x<b}} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$
$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est généralisée en* a*.*

Définition 14 *Pour* $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ *continue par morceaux et* $c \in]a,b[$*, on dit que* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ *convergent et on note* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.
$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *est généralisée en* a *et* b*. Cette définition ne dépend pas de* $c \in]a,b[$*.*

Définition 15 *Si une intégrale généralisée ne converge pas on dit qu'elle diverge.*

Définition 16
Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle d'extrémités a, b, $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge.

Proposition 10
Une intégrale absolument convergente est convergente et si $a \leq b$, $\mid \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \mid \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$

Proposition 11
Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I d'extrémités a, b, $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ on a :
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente si et seulement si $f \in \mathcal{L}^1(I)$
Si f est intégrable on a : $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_I f(t)\mathrm{d}t$

Définition 17
Soit f est une fonction continue par morceaux sur un intervalle I d'extrémités a, b, $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, si $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge mais n'est pas absolument convergente on dit que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Exemple 1
$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est une intégrale généralisée semi-convergente.

Proposition 12 *L'ensemble des fonctions définies et continues par morceaux sur un intervalle I d'extrémités a, b à valeurs dans $\mathbb{K}$ pour lesquelles l'intégrale généralisée sur I converge, forment un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application $f \rightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est alors une forme linéaire sur cet espace vectoriel.*

4 Changement de variable

Théorème 5
Si
f est une fonction intégrable sur un intervalle I et φ est une bijection d'un intervalle J sur I de classe $\mathcal{C}^1$ sur J
Alors
$(f \circ \varphi).\varphi' \in \mathcal{L}^1(J)$ et $\int_I f(x)\mathrm{d}x = \int_J f \circ \varphi(t).|\varphi'(t)|\mathrm{d}t$
Si J a pour extrémités a et b : $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$

5 Théorèmes de convergence

5.1 Théorème de convergence dominée (ou théorème de Lebesgue)

Théorème 6 (Théorème de convergence dominée de lebesgue)
Si

1. *$(f_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}_m(I,\mathbb{K})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$*
2. *$(f_n)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I*
3. *$\exists g \in \mathcal{L}^1(I)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$ (hypothèse de domination)*

Alors

1. *$\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$.*
2. *$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$*

Remarque 3
Avec les mêmes hypothèses on a, plus précisément : $\lim\limits_{n->+\infty} \int_I |f - f_n| = 0$
On dit que la suite $(f_n)_n$ converge en moyenne vers la fonction f

5.2 Théorème de convergence des séries de fonctions

On peut appliquer le théorème de convergence dominée aux sommes partielles de la série de fonctions ou à la suite des restes de la série, on dispose aussi du théorème suivant :

Théorème 7
Si

1. *$(f_n)_n$ est une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$*
2. *$\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I et a pour somme f une fonction continue par morceaux sur I*
3. *$\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ converge.*

Alors
$f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$ et $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$

6 Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ définie sur $A\times I$, on s'intéresse à la fonction F telle que pour $x \in A,\ F(x) = \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$, l'ensemble de définition de F est l'ensemble des valeurs $x \in A$ pour lesquelles la fonction $t \to f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

6.1 Continuité

Théorème 8
Si

1. *$\forall x \in A,\ t \to f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*
2. *$\forall t \in I, x \to f(x,t)$ est continue sur A*
3. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall (x,t) \in A\times I,\ \mid f(x,t) \mid \leq g(t)$ (hypothèse de domination)*

Alors
La fonction F est définie et continue sur A

Le théorème précédent reste valable si l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment de A :

Théorème 9
Si

1. *$\forall x \in A,\ t \to f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*
2. *$\forall t \in I,\ x \to f(x,t)$ est continue sur A*
3. *Pour tout segment $S \subset A$, il existe une fonction $g_S \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall (x,t) \in S\times I,\ \mid f(x,t) \mid \leq g_S(t)$ (hypothèse de domination sur tout segment)*

Alors
La fonction F est définie et continue sur A

6.2 Dérivation

Théorème 10 (Formule de Leibniz)
Si

1. *$\forall x \in A,\ t \to f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.*
2. *$\forall t \in I,\ x \to f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A*
3. *$\forall x \in A,\ t \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I*
4. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall (x,t) \in A\times I,\ \mid \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \mid \leq g(t)$ (hypothèse de domination)*

Alors

1. *La fonction F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A*
2. *$F'(x) = \int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$*

Le théorème précédent reste valable si l'hypothèse de domination est vérifiée sur tout segment :

Théorème 11
Si

1. *$\forall x \in A,\ t \to f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.*
2. *$\forall t \in I,\ x \to f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A*
3. *$\forall x \in A,\ t \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I*
4. *Pour tout segment $S \subset A$, il existe une fonction $g_S \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que $\forall (x,t) \in S \times I,\ \mid \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \mid \leq g_S(t)$ (hypothèse de domination sur tout segment)*

Alors

1. *La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A*
2. *$F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$*

6.3 Limites

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a \in A$ ou a est une extrémité de A, pour étudier la limite de F en a on peut utiliser le théorème de convergence dominée avec le résultat suivant :
$\lim\limits_{x\to a} F(x) = L$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = L$.

6.4 Cas d'un segment

Soit $I = [a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, A un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{ccc} A \times I & \to & \mathbb{K} \\ (x,t) & \to & f(x,t) \end{array}$ une application.

On s'intéresse à la fonction F telle que : $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathtt{dt}$ définie pour les valeurs de x pour lesquelles $t \to f(x,t)$ est intégrable sur I.

1. **Continuité**

   Théorème 12
   Si
   f est continue sur $A \times I$ (par rapport au couple (x,t)).
   Alors
   F est définie et continue sur A

2. **Dérivation**(formule de Leibniz)

   Théorème 13
   Si
   - *f est continue sur $A \times I$ (par rapport au couple (x,t)).*
   - *$\dfrac{\delta f}{\delta x}$ est définie et continue sur $A \times I$ (par rapport au couple (x,t)).*

   Alors
   F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et $F^{'}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\delta f}{\delta x}(x,t)\mathtt{dt}$

3. **Intégration**(formule de Fubini)

   Théorème 14
   Si
   f est continue sur $A \times I$ (par rapport au couple (x,t)).
   Alors
   Pour tout segment $[c,d] \subset A$ $\displaystyle\int_c^d [\int_a^b f(x,t)\mathtt{dt}]\mathtt{dx} = \int_a^b [\int_c^d f(x,t)\mathtt{dx}]\mathtt{dt}$

Définition 18
Soit f une application continue sur $[a,b]\times[c,d]$ à valeurs complexes, on appelle intégrale double de f sur $[a,b]\times[c,d]$ la valeur commune donnée par le théorème de Fubini, on note :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$