Inégalités dans $\mathbb{R}$

Quelques bases :

$(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné, c'est à dire que la relation d'ordre est compatible avec les opérations, elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $a \leq b$ et $c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c \leq b + c$
2. $a \geq 0$ et $b \geq 0 \ \Rightarrow \ a.b \geq 0$

Ce qui permet de montrer :

1. **Les inégalités s'ajoutent membre à membre :**
$$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \Rightarrow a + c \leq b + d$$
Attention ! Les inégalités ne se retranchent pas membre à membre.
2. Pour la multiplication c'est plus délicat :
Les inégalités de nombres positifs se multiplient membre à membre :
$\begin{cases} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq c \leq d \end{cases} \Rightarrow ac \leq bd$
Attention ! les inégalités ne se divisent pas membre à membre.
Pour les inégalités avec des nombres négatifs on retiendra :
si on multiplie les deux membres d'une inégalité par un nombre négatif l'inégalité change de sens :
$\begin{cases} a \leq b \\ c \leq 0 \end{cases} \Rightarrow ac \geq bc$
3. Les carrés sont des nombres positifs :
$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$
4. Il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations.
(sinon comme $1 = 1^2$ et $-1 = i^2$ sont des carrés ils seraient tous les deux positifs, or l'opposé d'un nombre positif est négatif) de sorte que **l'on n'écrit pas** par exemple :$\dfrac{1}{2}\ e^{ix} < 1$ ou $1 + i \leq 2$, ceci n'a pas de sens, par contre il est correct d'écrire : $|\dfrac{1}{2}e^{ix}| < 1$ ou $|1 + i| \leq 2$, ce sont alors des inégalités dans $\mathbb{R}$.

Attention ! il est important de bien faire la différence entre inégalité stricte et inégalité au sens large :
La proposition $2 \leq 2$ est vraie mais la proposition $2 < 2$ est fausse, $1 \leq 2$ est vraie et $1 < 2$ est aussi vraie
Dans $\mathbb{R}$: l'inéquation $x^2 \leq x$ a pour ensemble de solutions $\mathcal{S} = [0, 1]$ alors que l'inéquation $x^2 < x$ a pour ensemble de solutions $]0, 1[$

Quelques inégalités qu'il est conseillé de connaître :

1. $\forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[, \qquad \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x \leq \tan x$
2. $\forall x \in [0, +\infty[, \qquad \sin x \leq x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \qquad 1 + x \leq e^x$
4. $\forall x \in]-1, +\infty[\qquad \ln(1 + x) \leq x$
5. $\forall x \in [0, 1], \qquad x^2 \leq x \leq 1$ et $\forall x \in [1, +\infty[,\ x^2 \geq x \geq 1$

Règles importantes :

1. Pour majorer un rapport de nombre positifs, on majore le numérateur et on minore le dénominateur par un nombre strictement positif :
$\begin{cases} 0 \leq a \leq c \\ b \geq d > 0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{b} \leq \dfrac{c}{d}$
2. Pour minorer un rapport de nombre positifs, on minore le numérateur par un nombre positif et on majore le dénominateur :
$\begin{cases} a \geq c \geq 0 \\ 0 < b \leq d \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{b} \geq \dfrac{c}{d}$
3. Pour majorer une différence, on majore le premier terme ou on minore le deuxième terme :
$\begin{cases} a \leq c \\ b \geq d \end{cases} \Rightarrow a - b \leq c - d$
4. Pour minorer une différence, on minore le premier terme ou on majore le deuxième terme :
$\begin{cases} a \geq c \\ b \leq d \end{cases} \Rightarrow a - b \geq c - d$