Espaces vectoriels normés de dimension finie

Ce document n'est pas un cours mais présente seulement quelques notions à connaître sur le sujet.

Dans ce chapître E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie (ou $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_d)$ une base de E.

1 Topologie

Théorème 1
Dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie les normes sont équivalentes deux à deux.

Conséquences :
Dans les espaces vectoriels de dimension finie, les notions suivantes ne dépendent pas des normes choisies :
Les parties bornées, les applications bornées, les applications lipschitziennes, les parties ouvertes, les parties fermées, l'intérieur d'une partie, l'adhérence d'une partie, les compacts, les valeurs d'adhérence d'une suite, la convergence et la limite d'une suite, les suites de Cauchy, les parties complètes, les limites des fonctions, la continuité des fonctions, la continuité uniforme d'une fonction ...
De sorte que lorsqu'on se placera dans un espace vectoriel de dimension finie il ne sera pas nécessaire de préciser la norme choisie pour aborder l'un de ces concepts.

Théorème 2
Un espace vectoriel de dimension finie est un espace de Banach.

Théorème 3
Dans un espace vectoriel de dimension finie les compacts sont les parties fermées et bornées.

Théorème 4
Dans un espace vectoriel normé si $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite $\vec{\ell}$ alors la partie $K=\{\vec{u}_n,\, n\in\mathbb{N}\}\cup\{\vec{\ell}\}$ est une partie compacte.

Remarque 1
Ce résultat s'applique que l'espace vectoriel normé soit de dimension finie ou non.

Théorème 5 (applications linéaires)
Si E est un espace vectoriel de dimension finie, (F,N_F) est un espace vectoriel normé et $f\in\mathcal{L}(E,F)$
Alors f est continue, soit $\mathcal{L}_c(E,F)=\mathcal{L}(E,F)$

Théorème 6
Si $E_k,\ldots,E_p$ sont p $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie, $E=E_1\times\ldots,E_p$ est l'espace produit, (F,N_F) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé et f est une application p-linéaire de $E_1\times\ldots\times E_p$ dans F
Alors f est continue sur E.
En particulier en dimension finie les applications bilinéaires sont continues.

Théorème 7
Soit (F,N_F) un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé et A une partie de E espace vectoriel de dimension finie.
Si $f\in\mathscr{F}(A,F)$ avec $f=\sum_{k=1}^{d} f_k\vec{e}_k$ où $f_k\in\mathscr{F}(A,\mathbb{K})$ pour $k\in[\![1,d]\!]$, les f_k sont les fonctions composantes de f
Alors $f\in\mathcal{C}(A,F)$ si et seulement si $\forall k\in[\![1,d]\!]$, $f_k\in\mathcal{C}(A,\mathbb{K})$

Proposition 1
Un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est une partie fermée.

2 Connexité par arcs

Définition 1 *Soit $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E.*
On dit que A est connexe par arc si $\forall(\vec{a},\vec{b})\in A^2$ il existe un chemin continu de A, $([0,1],\varphi)$ tel que l'application $\varphi:[0,1]\to A$ soit continue sur $[0,1]$ avec $\varphi(0)=\vec{a}$ et $\varphi(1)=\vec{b}$

Exemple 1

- *Dans un espace vectoriel* $(E, \| \ \|)$ $\varnothing$ *et* E *sont connexes par arc.*
- *Dans un espace vectoriel* $(E, \| \ \|)$*, toute partie convexe de* E *est connexe par arc, de sorte que les boules ouvertes ou fermées sont connexes par arc.*
- *Si* (I, φ) *est un arc paramétré continu d'un espace vectoriel normé, c'est à dire que* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* φ *est une application continue sur* I *à valeur dans l'espace vectoriel normé, alors l'image* $\varphi(I)$ *est une partie connexe par arc de l'espace vectoriel.*

Théorème 8
Les parties connexes par arc de $\mathbb{R}$ *sont les intervalles.*

Proposition 2
Si E_k, $k \in [\![1, d]\!]$ *sont* d $\mathbb{K}$ *espaces vectoriels normés,* A_k, $k \in [\![1, d]\!]$ *sont* d *parties connexes par arc avec* $A_k \subset E_k$ *et* $E = E_1 \times \ldots \times E_d$ *est l'espace vectoriel produit*
Alors $A = A_1 \times \ldots \times A_d$ *est une partie connexe par arc de* E.

Théorème 9
L'image d'une partie connexe par arc par une application continue est une partie connexe par arc.
C'est à dire :
Si (E, N_E) *et* (F, N_F) *sont deux espaces vectoriels normés,* f *est une application continue sur* E *à valeurs dans* F *et* A *est une partie connexe par arc de* E
Alors $f(A)$ *est une partie connexe par arc de* F

Conséquence :

Théorème 10
Si f *est une application continue sur espace vectoriel normé* E *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, A *est une partie connexe par arc de* E *et* $(\vec{a}, \vec{b}) \in A^2$
Alors $f(A)$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$.

Conséquence :

Théorème 11 (des valeurs intermédiaires)
Si f *est une application continue sur espace vectoriel normé* E *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, A *est une partie connexe par arc de* E *et* $(\vec{a}, \vec{b}) \in A^2$
Alors $\forall \lambda \in [f(\vec{a}), f(\vec{b})]$ *(ou* $[f(\vec{b}), f(\vec{a})]$*),* $\exists \vec{c} \in A,\ f(\vec{c}) = \lambda$

Théorème 12
Si f *est une application de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}$ *continue sur un segment* $[a, b]$
Alors $f([a, b])$ *est un segment de* $\mathbb{R}$.

3 Suites et séries

Dans ce paragraphe E est un espace vectoriel de dimension finie rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d)$.

3.1 Convergence

Proposition 3
Une suite ou une série de E *converge si et seulement si les suites ou séries composantes dans la base* $\mathcal{B}$ *convergent dans* $\mathbb{R}$*. En cas de convergence on a alors :*
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_n = x_{1n}\vec{e}_n + \cdots + x_{dn}\vec{e}_d$ *Alors*

- *Pour une suite* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \vec{u}_n = \lim_{n\to+\infty} x_{1n}\,\vec{e}_1 + \cdots + \lim_{n\to+\infty} x_{dn}\,\vec{e}_d$
- *Pour une série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \vec{u}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{1n}\,\vec{e}_1 + \cdots + \sum_{n=0}^{+\infty} x_{dn}\,\vec{e}_d$

Proposition 4
Dans un espace vectoriel de dimension finie
Si une série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \vec{u}_n$ *converge Alors* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \vec{u}_n = \vec{0}$

✓ La réciproque est fausse.

3.2 Critère de Cauchy

Théorème 13
Dans un espace vectoriel de dimension finie une suite ou une série converge si et seulement si elle vérifie la propriété de Cauchy.

Définition 2
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\sum_{n\geqslant 0} \vec{u}_n$ *une série de E, on dit que* $\sum_{n\geqslant 0} \vec{u}_n$ *est absolument convergente si la série à termes réels positifs* $\sum_{n\geqslant 0} \| \vec{u}_n \|$ *converge dans $\mathbb{R}$, où $\| \ \|$ est une norme sur E.*
(Cette définition ne dépend pas de la norme $\| \ \|$ choisie sur E).

Théorème 14
Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, si une série est absolument convergente alors elle est convergente.

3.3 Série géométrique

Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \ . \ , \| \ \|)$ une algèbre normée de dimension finie
Rappel : $\| \ \|$ est une norme d'algèbre si $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{A}^2$, $\| \vec{x} \times \vec{y} \| \leqslant \| \vec{x} \| \| \vec{y} \|$

Proposition 5
Si $(\mathcal{A}, +, \times, \ . \ , \| \ \|)$ est une algèbre normée de dimension finie d'élément unité $\vec{e}$ pour la multiplication soit $\vec{u} \in \mathcal{A}$ tel que $\| \vec{u} \| < 1$
Alors

1. *La série* $\sum_{n\geqslant 0} \vec{u}^{\,n}$ *est absolument convergente dans $\mathcal{A}$*
2. *$\vec{e} - \vec{u}$ est inversible et* $(\vec{e} - \vec{u})^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \vec{u}^{\,n}$

Exercice 1
Montrer que dans une algèbre $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ de dimension finie l'ensemble $\mathcal{A}^*$ des inversibles est un ouvert de $\mathcal{A}$.

3.4 Série exponentielle

Proposition 6
Si $(\mathcal{A}, +, \times, \ . \ , \| \ \|)$ est une algèbre normée de dimension finie d'élément unité $\vec{e}$ pour la multiplication soit $\vec{u} \in \mathcal{A}$
Alors La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \cdot \vec{u}^{\,n}$ *est absolument convergente dans $\mathcal{A}$*

Définition 3
Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \ . \ , \| \ \|)$ une algèbre normée de dimension finie d'élément unité $\vec{e}$ pour la multiplication et $\vec{u} \in \mathcal{A}$
On appelle exponentielle de $\vec{u}$ et on note $\exp \vec{u}$ la somme de la série exponentielle $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} \cdot \vec{u}^{\,n}$

$$\exp \vec{u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot \vec{u}^{\,n}$$

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, pour $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$ on peut définir l'exponentielle d'un endomorphisme
De même pour $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on peut définir l'exponentielle d'une matrice.

Propriétés 1
Soit $(\mathcal{A}, +, \times, \ . \ , \| \ \|)$ une algèbre normée de dimension finie d'éléments neutres $\vec{e}$ pour la multiplication, $\vec{0}$ pour l'addition et $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{A}^2$

- P1 $\exp \vec{0} = \vec{e}$
- P2 *Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$ alors* $\exp(\vec{u} + \vec{v}) = \exp \vec{u} \times \exp \vec{v}$
- P3 *Si $\mathcal{A} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), n \geqslant 1$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on suppose que M est diagonalisable $M = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de M*
  Alors $\exp M = P \exp D \, P^{-1}$ *où* $\exp D = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$

3.5 Intégration-dérivation

3.5.1 Convergence en moyenne

Pour $A=[a,b]$, dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),N_1)$ où $\forall f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),\ N_1(f)=\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ on a :

Propriétés 2

1. *$\forall f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),\ \left|\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant N_1(f)\leqslant (b-a)N_\infty(f)$*
2. *Les deux formes linéaires suivantes sont continues :*

$$\begin{array}{ccc}(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),N_1) & \to & \mathbb{K}\\ f & \mapsto & \displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t\end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{ccc}(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),N_\infty) & \to & \mathbb{K}\\ f & \mapsto & \displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t\end{array}$$

Théorème 15
Soit $(f_n)_n$ une suite de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$
Si *$(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f*
Alors

- *$f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ et $(f_n)_n$ converge vers f dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),N_1)$*
  On dit que la suite $(f_n)_n$ converge vers f en moyenne dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.
- *$\displaystyle\int_{[a,b]}\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]} f_n(t)\mathrm{d}t$*

Théorème 16
Si

1. *$(u_n)_n$ est une suite de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$*
2. *$\displaystyle\sum_n u_n$ converge normalement sur $[a,b]$ et a pour somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$*

Alors

1. *$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$*
2. *$\displaystyle\sum_n N_1(u_n)$ converge dans $\mathbb{R}$*
3. *$N_1(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n)\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}N_1(u_n)$*

3.5.2 Convergence en moyenne quadratique

Pour $A=[a,b]$, dans $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),N_2)$ où $\forall f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),\ N_2(f)=\left(\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$ on a :

Propriétés 3

1. *N_2 est une norme hermitienne pour le produit scalaire $<f,g>=\displaystyle\int_{[a,b]}\overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t$*
2. *$\forall f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),\ \left|\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\sqrt{b-a}N_2(f)$*
3. *$\forall f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),\ N_2(f)\leqslant\sqrt{b-a}N_\infty(f)$*
4. *$\forall f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),\ N_1(f)\leqslant\sqrt{b-a}N_2(f)$*
5. *La forme linéaire suivante est continue :*

$$\begin{array}{ccc}(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}),N_2) & \to & \mathbb{K}\\ f & \mapsto & \displaystyle\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t\end{array}$$

Théorème 17
Soit $(f_n)_n$ *une suite de* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$
Si $(f_n)_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *vers une fonction* f
Alors
$f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ *et* $(f_n)_n$ *converge vers* f *dans* $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}), N_2)$
On dit que la suite $(f_n)_n$ *converge vers* f *en moyenne quadratique dans* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.

3.5.3 Dérivabilité

Suites :
Soit $(F, \| \|_F)$ un espace vectoriel de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite d'applications de I dans F, f une application de I dans F

Théorème 18
Si

1. $\forall n,\ f_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I
2. $(f_n)_n$ *converge simplement vers* f *sur* I
3. $(f'_n)_n$ *converge uniformément vers une fonction* g *sur tout segment de* I

Alors

1. f *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* I.
2. $f' = g$ *soit* $\forall x \in I,\ \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\right)'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x)$
3. $(f_n)_n$ *converge uniformément sur tout segment de* I

Séries :
Dans ce paragraphe A est un intervalle de $\mathbb{R}$, $(F, \| \|_F)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $(u_n)_n$ est une suite de $\mathcal{C}([a,b],F)$.

Théorème 19
Si

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* A
2. $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge simplement sur* A
3. $\sum\limits_{n\geq 0} u'_n$ *converge uniformément sur tout segment de* A

Alors

1. $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* A.
2. $S' = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u'_n$
3. $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge uniformément sur tout segment de* A

Application : **Fonction exponentielle**
Soit $(\mathcal{A}, +, \times, ., \| \|_{\mathcal{A}})$ une algèbre normée de dimension finie.

Théorème 20
Si $a \in \mathcal{A}$ *et* $e_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{A} \\ t & \mapsto & \exp ta \end{array}$
Alors e_a *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $\mathrm{D}e_a = ae_a = e_a a$

4 Dérivation

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, F un espace vectoriel de dimension finie rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d)$ et $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$ de fonctions composantes dans la base $\mathcal{B}$, $(f_k)_{1\leqslant k\leqslant d}$, $f = \sum\limits_{k=1}^{d} f_k \vec{e}_k$

Définition 4
On dit que f est dérivable en $t_0 \in I$ si $\lim_{t \to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \in F$, on note alors $f'(t_0)$ ou $Df(t_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t_0)$ cette limite c'est le vecteur dérivée de f en t_0

On définit de même que dans $\mathbb{R}$ la dérivée à droite et la dérivée à gauche en un point de I.

Proposition 7
f est dérivable en un point t_0 si et seulement si les fonctions composantes sont dérivables en t_0
On a alors $f'(t_0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} f'_k(t_0)\vec{e}_k$

On définit comme dans $\mathbb{R}$ les fonctions de classes $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N}$ ou $p = +\infty$ sur I et les espaces vectoriels $\mathcal{C}^p(I, F)$
Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^p$) sur I l'ensemble des points $f(t)$ lorsque t parcourt I est une courbe de F, (I, f) est appelé arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ (resp. $\mathcal{C}^p$), pour $t \in I$ si $f'(t) \neq \vec{0}$ alors $f'(t)$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe en $f(t)$._ Notations : Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et $t \in I$ on note pour $k \leqslant p$, $f^{(k)(t)}$ ou $D^k f(t)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t}(t)$ la dérivée k-ième de f en t.

Proposition 8
Si $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et $a \in I$
Alors $\forall x \in I$, $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$

Remarque 2 *Ce résultat reste vrai si f est continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I*
note : les fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur I à valeurs dans F se définissent comme les fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux à valeurs réelles, on a f est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur I si et seulement si les fonctions composantes de f dans $\mathcal{B}$ sont de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur I.

Proposition 9
Si $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et $[a, b] \subset I$ Alors $N_\infty(f) \leqslant \| f(a) \|_F + \displaystyle\int_{[a,b]} \| f'(t) \|_F \, \mathrm{d}t$

Proposition 10
Si $f \in \mathcal{C}(I, F)$, h est une primitive de f sur I et $[a, b] \subset I$ Alors $N_\infty(h) \leqslant \| h(a) \|_F + \displaystyle\int_{[a,b]} \| f(t) \|_F \, \mathrm{d}t$

Propriétés 4
Soit Soit F, G, H , $E_1, \ldots E_p$ des espaces vectoriels normés de dimension finie, $f \in \mathcal{C}^1(I, F)$
- *Si $u \in \mathcal{L}(F, G)$ Alors $u(f) \in \mathcal{C}^1(I, G)$ et $u(f)' = u(f')$*
- *Si $g \in \mathcal{C}^1(I, G)$, $B \in \mathcal{L}_2(F \times G, H)$ (espace vectoriel des applications bilinéaires)*
  Alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^1$ et $B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$
- **Formule de Leibniz**
  Si $f \in \mathcal{C}^p(I, F)$, $g \in \mathcal{C}^p(I, G)$, $B \in \mathcal{L}_2(F \times G, H)$ (espace vectoriel des applications bilinéaires)
  Alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^p$ et $B(f, g)^{(p)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B(f^{(k)}, g^{(p-k)})$
- *Si $\Phi : \begin{array}{ccc} E_1 \times E_p & \to & F \\ (x_1, \ldots, x_p) & \mapsto & \Phi(x_1, \ldots, x_p) \end{array}$ est p-linéaire et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $f_k \in \mathcal{C}^1(I, E_k)$*
  Alors $B(f_1, \ldots, f_p) \in \mathcal{C}^1(I, F)$ et $B(f_1, \ldots, f_p)' = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} B(f_1, \ldots, f'_k, \ldots, f_p)$
- *Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$ Alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^1(J, F)$ et $\forall x \in J$, $(f \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x).(f'(\varphi(x)))$*

Définition 5
Soit f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J de $\mathbb{R}$, on dit que f est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme ($k \geqslant 1$ ou $k = +\infty$) de I sur J si
- *f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I*
- *f est une bijection de I sur J*
- *f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J*

Théorème 21
Si f une application de classe $\mathcal{C}^k$, ($k \geqslant 1$ ou $k = +\infty$) sur un intervalle I et $J = f(I)$
Alors

- *J est un intervalle*
- *f est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme de I sur J si et seulement si $\forall t \in I,\ f'(t) \neq 0$*

Théorème 22 (Inégalité de Taylor Lagrange)
Si

1. *I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $(F, \|\ \|_F)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie*
2. *$f \in \mathcal{C}^{p+1}(I, F)$, $p \in \mathbb{N}$*
3. *$a \in I$*

alors
$\forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_p(x)$ *avec*
$\| R_p(x) \|_F \leqslant \dfrac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!} \displaystyle\sup_{t \in [a,x]} \| f^{(p+1)}(t) \|_F$

Théorème 23 (formule de Taylor avec reste intégral)
Si

1. *I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $(F, \|\ \|_F)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie*
2. *$f \in \mathcal{C}^{p+1}(I, F)$, $p \in \mathbb{N}$*
3. *$a \in I$*

alors
$\forall x \in I,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)\mathrm{d}t$

Théorème 24
Si f continue sur un intervalle I dérivable sur $\overset{o}{\mathrm{I}}$ à valeurs dans F
Alors f est constante sur I si et seulement si $\forall t \in \overset{o}{\mathrm{I}},\ f'(t) = \vec{0}$.

On aussi :

Théorème 25
si *$\vec{f} : [a, b] \mapsto F$ et $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ sont continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ et vérifient $\forall t \in]a, b[,\ \| \vec{f}(t) \|_F \leqslant g'(t)$*
Alors $\| \vec{f}(b) - \vec{f}(a) \|_F \leqslant g(b) - g(a)$

5 Intégration

Soit $\vec{f}$ est une fonction numérique continue sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $(F, \|\ \|_F)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d)$ et de fonctions composantes $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$, $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} f_k \vec{e}_k$ si $\vec{\Phi}$ est une primitive de $\vec{f}$ sur $[a, b]$ on notera $\displaystyle\int_a^b \vec{f}(t)dt = \vec{\Phi}(b) - \vec{\Phi}(a)$., si $\vec{\Phi} = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \Phi_k \vec{e}_k$ alors $\forall k \in [\![1, d]\!]$, ϕ_k est une primitive de f_k sur $[a, b]$ et $\displaystyle\int_a^b \vec{f}(t)\mathrm{d}t = \sum_a^b \int_a^b f_k(t)\mathrm{d}t.\vec{e}_k = \sum_{k=1}^{d} (\Phi_k(b) - \Phi_k(a)).\vec{e}_k$

5.1 Subdivisions

Définition 6 *: On appelle subdivision d'un segment $[a, b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$.*

5.2 Fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition 7 *Une application $\vec{f}:[a,b]\to F$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma=(x_k)_{0\le k\le n}$ de $[a,b]$ telle que $\forall k\in\{0,\cdots,n-1\}$, $\vec{f}$ est continue sur $]x_k,x_{k+1}[$ et se prolonge par continuité sur $[x_k,x_{k+1}]$.*

On notera $\vec{f_k}$ la fonction continue définie sur $[x_k,x_{k+1}]$ par :
$\vec{f_k}(x)=\vec{f}(x)$ *si* $x\in]x_k,x_{k+1}[$, $\vec{f_k}(x_k)=\lim\limits_{x\to x_k^+}\vec{f}(x)$, $\vec{f_k}(x_{k+1})=\lim\limits_{x\to x_{k+1}^-}\vec{f}(x)$

Définition 8 *Une application $\vec{f}:[a,b]\to\mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur $[a,b]$ ($p\in\mathbb{N}$, ou $p=+\infty$) s'il existe une subdivision $\sigma=(x_k)_{0\le k\le n}$ de $[a,b]$ telle que $\forall k\in\{0,\cdots,n-1\}$, $\vec{f}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $]x_k,x_{k+1}[$ et se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[x_k,x_{k+1}]$.*

Proposition 11
Une application $\vec{f}:[a,b]\to\mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur $[a,b]$ ($p\in\mathbb{N}$, ou $p=+\infty$) si et seulement si les fonctions composantes dans une base sont de classe $\mathcal{C}^p$ par morceaux sur $[a,b]$

Propriétés 5

1. *Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée*
2. *Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, $\displaystyle\int_a^b\vec{f}(t)dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\vec{f_k}(t)dt$,*

   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\vec{f_k}(t)dt$ ne dépend pas de la subdivision $\sigma=(x_k)_{0\le k\le n}$ de $[a,b]$

5.3 Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition 9 *Soit I un intervalle, une application $\vec{f}:I\to F$ est continue par morceaux sur I si $\vec{f}$ est continue par morceaux sur tout segment de I.*

Soit $\mathcal{C}_m(I,F)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans F

Proposition 12 *$(\mathcal{C}_m(I,F)\ ,+,\times,.)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.*

5.4 Fonctions en escalier

Définition 10 *Une application $\vec{f}:[a,b]\to F$ est une fonction escalier sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma=(a_k)_{0\le k\le n}$ de $[a,b]$ telle que, $\forall k\in\{0,\ldots,n-1\}$, $\vec{f}$ est constante sur l'intervalle $]a_k,a_{k+1}[$.
σ est une subdivision associée à $\vec{f}f$.*

Si on désigne par $\chi_{]a_k,a_{k+1}[}$ la fonction caractéristique de $]a_k,a_{k+1}[$, c'est à dire la fonction définie par :
$\chi(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in]a_k,a_{k+1}[\\ 0 & \text{si } x\notin]a_k,a_{k+1}[\end{cases}$ et par $\vec{\lambda}_k$ la valeur de f sur l'intervalle $]a_k,a_{k+1}[$, on a :
$\forall x\in[a,b]$, $\displaystyle\vec{f}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\chi_{]a_k,a_{k+1}[}(x)\vec{\lambda}_k+\sum_{k=0}^{n}\chi_{\{a_k\}}(x).\vec{f}(a_k)$.

Définition 11 *Soit I un intervalle et $\vec{f}$ une application de I dans F. $\vec{f}$ est dite en escalier s'il existe un segment $[a,b]\subset I$ tel que $\vec{f}_{[a,b]}$ soit une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\vec{f}$ est nulle en dehors de $[a,b]$.*

Propriétés 6 *Soit $E(I,F)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur I, $E(I,F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur I.*

Remarque 3
$E(I,F)$ est aussi un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux sur I.

5.5 Théorèmes d'approximation

- **Théorème 26** *Pour toute fonction $\vec{f}$ continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans F, il existe une suite $(\vec{\varphi}_n)_n$ de fonctions en escalier sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers $\vec{f}$ sur $[a,b]$.*

- **Théorème 27** *Pour toute fonction $\vec{f}$ continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, il existe une suite $(\vec{\varphi}_n)_n$ de fonctions continues et affines par morceaux ($\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[a,b]$, $\vec{\varphi}_n(t)=t\vec{\alpha}_n+\vec{\beta}_n$ avec $(\vec{\alpha}_n,\vec{\beta}_n)\in F^2$) sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

5.6 Intégrale d'une fonction vectorielle sur un intervalle

soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\vec{f}$ est une fonction numérique continue par morceaux sur I à valeurs dans $(F, \| \|_F)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_d)$ et de fonctions composantes $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant d}$, $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} f_k \vec{e}_k$

Définition 12
$\vec{f}$ est intégrable sur I si $\| f \|_F$ est intégrable sur I

On notera $\mathcal{L}^1(I, F)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}_m(I, F)$ intégrables sur I.

Proposition 13
$\vec{f}$ est intégrable sur I si et seulement si $\forall k \in [\![1, d]\!]$, f_k est intégrable sur I

Définition 13
Si $\vec{f}$ est intégrable sur I on appelle intégrale de f sur I le vecteur $\displaystyle\int_I \vec{f}(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{d} \int_I f_k(t)\mathrm{d}t.\vec{e}_k$

Proposition 14
$\mathcal{L}^1(I, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_m(I, F)$

Proposition 15
$\forall \vec{f} \in \mathcal{L}^1(I, F), \quad \displaystyle\| \int_I \vec{f}(t)\mathrm{d}t \|_F \leqslant \int_I \| \vec{f}(t) \|_F \, \mathrm{d}t.$

5.7 Continuité d'une intégrale avec paramètre

Soit A une partie de $\mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ définie sur $A \times I$, on s'intéresse à la fonction Φ telle que pour $x \in A$, $\Phi(x) = \displaystyle\int_I f(x, t)\mathrm{d}t$, l'ensemble de définition de Φ est l'ensemble des valeurs $x \in A$ pour lesquelles la fonction $t \to f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.

Théorème 28
Si

1. *$\forall x \in A$, $t \to f(x, t)$ est continue par morceaux sur I.*
2. *$\forall t \in I, x \to f(x, t)$ est continue sur A*
3. *Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ telle que $\forall (x, t) \in A \times I$, $| f(x, t) | \leq g(t)$ (hypothèse de domination)*

Alors

1. *$\forall x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I.*
2. *La fonction F est définie et continue sur A*

Le théorème précédent reste valable si l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie compacte de A :

Théorème 29
Si

1. *$\forall x \in A$, $t \to f(x, t)$ est continue par morceaux sur I.*
2. *$\forall t \in I$, $x \to f(x, t)$ est continue sur A*
3. *Pour toute partie compacte K de A, $K \subset A$, il existe une fonction $g_K \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ telle que $\forall (x, t) \in K \times I$, $| f(x, t) | \leq g_K(t)$ (hypothèse de domination sur tout compact)*

Alors
La fonction F est définie et continue sur A

Remarque 4 *Les deux théorèmes précédents s'appliquent pour une fonction f à valeurs dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé de dimension finie.*