Espaces vectoriels normés réels ou complexes

Ce document n'est pas un cours mais présente seulement quelques notions à connaître sur le sujet.

Dans ce chapître E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel (ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1 Normes et distances

1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1
On appelle norme sur E toute application de N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall \vec{x} \in E,\ N(\vec{x}) = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$
2. $\forall (\lambda, \vec{x}) \in \mathbb{K} \times E,\ N(\lambda.\vec{x}) = |\lambda|.N(\vec{x})$
3. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2,\ N(\vec{x} + \vec{y}) \leqslant N(\vec{x}) + N(\vec{y})$ *(inégalité triangulaire).*

On dit alors que (E, N) ou E (s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé.
Pour $\vec{x} \in E$, $N(\vec{x})$ se note aussi souvent $\parallel \vec{x} \parallel$

Remarque 1 *Pour un espace vectoriel normé $(E, \parallel\,\parallel)$ on a :*

1. *Les propriétés 1. et 2. donnent pour $\vec{x} \in E$, $\parallel \vec{x} \parallel = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$*
2. *La propriété 3. permet de montrer l'inégalité de Minkowski : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2,\ |\parallel \vec{x} \parallel - \parallel \vec{y} \parallel| \leqslant \parallel \vec{x} - \vec{y} \parallel$*

Définition 2 (norme induite)
Soit $(E, \parallel\,\parallel)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E, la restriction $\parallel\,\parallel_{|F}$ de $\parallel\,\parallel$ à F est une norme sur F appelée norme induite, $(F, \parallel\,\parallel_{|F})$ est un espace vectoriel normé que l'on notera encore $(F, \parallel\,\parallel)$

Définition 3 (vecteurs unitaires)
Soit $(E, \parallel\,\parallel)$ un espace vectoriel normé et $\vec{x} \in E$

- *$\vec{x}$ est un vecteur unitaire si $\parallel \vec{x} \parallel = 1$*
- *Si $\vec{x} \neq \vec{0}$, on appelle vecteur unitaire associé à $\vec{x}$ le vecteur unitaire $\vec{e} = \dfrac{1}{\parallel \vec{x} \parallel}.\vec{x}$*

Définition 4 (parties bornées)
Soit $(E, \parallel\,\parallel)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E
A est une partie bornée de E si $\exists M \geqslant 0,\ \forall \vec{x} \in A,\ \parallel \vec{x} \parallel \leqslant M$.

Définition 5
Soit A un ensemble non-vide, $(E, \parallel\,\parallel)$ un espace vectoriel normé et f une application de A dans E
f est une application bornée si $f(A)$ est une partie bornée de E (c'est à dire $\exists M \geqslant 0,\ \forall t \in A,\ \parallel f(t) \parallel \leqslant M$).
On notera $\mathcal{B}(A, E)$ l'ensemble des applications bornées de A dans E

Proposition 1
Soit A un ensemble non-vide et $(E, \parallel\,\parallel)$ un espace vectoriel normé et $(\mathscr{F}(A, E), +, .)$ l'espace vectoriel des applications de A dans E.
$\mathcal{B}(A, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(A, E)$

Définition 6
Soit (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels normés, si f est un isomorphisme d'espace vectoriel de E_1 sur E_2 tel que $\forall \vec{x} \in E_1,\ N_2(f(\vec{x})) = N_1(\vec{x})$ on dit que f est une isométrie vectorielle.

Remarque 2 *Si (E_1, N_1) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé, E_2 est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et f est un isomorphisme d'espace vectoriel de E_1 sur E_2, on peut munir E_2 d'une norme N_2 pour laquelle f est une isométrie d'espace vectoriel normé de (E_1, N_1) sur (E_2, N_2) en posant $\forall \vec{y} \in E_2,\ N_2(\vec{y}) = N_1(f^{-1}(\vec{y}))$*

1.2 Exemples d'espaces vectoriels normés

1.2.1 Espaces vectoriels de dimension finie

1. $(\mathbb{R}, |\ |)$, $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé, $(\mathbb{C}, |\ |)$, $\mathbb{C}$ muni du module est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel normé (de dimension 1) c'est aussi un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé (de dimension 2).
   Soit n un entier naturel non-nul et $E = \mathbb{K}^n$, E peut être muni de l'une des trois normes classiques suivantes définies par : pour $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E$
   - $N_1(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$
   - $N_2(\vec{x}) = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$
   - $N_\infty(\vec{x}) = \displaystyle\sup_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$
2. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n \end{array}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel, en utilisant la remarque 2 on peut alors relativement à la base $\mathcal{B}$ munir E des trois normes N_1, N_2, N_∞ suivantes :
   pour $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n \in E$
   - $N_1(\vec{x}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|$
   - $N_2(\vec{x}) = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$
   - $N_\infty(\vec{x}) = \displaystyle\sup_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|$

1.2.2 Applications continues

Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ espace vectoriel des fonctions numériques continues sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, on peut munir E de l'une des trois normes classiques suivantes : pour $f \in E$

- $N_1(f) = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$, N_1 est la norme de la convergence en moyenne.
- $N_2(f) = \left(\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$, N_2 est la norme de la convergence quadratique.
- $N_\infty(f) = \displaystyle\sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$, N_∞ est la norme de la convergence uniforme.

1.2.3 Espaces ℓ^p

On considère $E = \mathcal{S}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et

- $\ell^\infty(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$
- $\ell^1(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n| \text{ converge}\}$
- $\ell^2(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2 \text{ converge}\}$.

$\ell^\infty(\mathbb{K})$, $\ell^1(\mathbb{K})$, $\ell^2(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de E on peut les munir respectivement des normes N_∞, N_1, N_2 suivantes :

- $\ell^\infty(\mathbb{K})$, $N_\infty((u_n)_n) = \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$
- $\ell^1(\mathbb{K})$, $N_1((u_n)_n) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$
- $\ell^2(\mathbb{K})$, $N_2((u_n)_n) = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$(\ell^\infty(\mathbb{K}), N_\infty)$, $(\ell^1(\mathbb{K}), N_1)$, $(\ell^2(\mathbb{K}), N_2)$ sont trois espaces vectoriels normés.

Propriétés 1
- $\ell^1(\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{K})$
- $\ell^2(\mathbb{K}) \subset \ell^\infty(\mathbb{K})$
- $\ell^1(\mathbb{K}) \subset \ell^2(\mathbb{K})$

Les inclusions sont strictes.

1.2.4 Applications bornées

Soit A un ensemble non-vide et $(F, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé, on considère $\mathcal{B}(A, F)$, le $\mathbb{K}$ espace vectoriel des applications bornées de A dans F. On muni cet espace vectoriel de la norme :
Pour $f \in \mathcal{B}(A, F)$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{\vec{x} \in A} \| f(\vec{x}) \|$. $(\mathcal{B}(A, F), N_\infty)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé,
N_∞ est la norme de la convergence uniforme.

1.2.5 Espaces préhilbertiens réels

Définition 7 (forme bilinéaire)
Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, $<,>$ est une forme bilinéaire sur E si

1. $<,>$ *est une application de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}$
2. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$,

   a) $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ \vec{z} & \mapsto & <\vec{x}, \vec{z}> \end{array}$ *est linéaire (on dit que $<,>$ est linéaire à droite)*

   b) $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ \vec{z} & \mapsto & <\vec{z}, \vec{y}> \end{array}$ *est linéaire (on dit que $<,>$ est linéaire à gauche)*

Si de plus $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $<\vec{y}, \vec{x}> = <\vec{x}, \vec{y}>$, on dit que $<,>$ est une forme bilnéaire symétrique.

Exemple 1

1. $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \mapsto & xx' - 2xy' + 3yx' + 5yy' \end{array}$, φ_1 *est une forme bilinéaire non symétrique sur* $\mathbb{R}^2$
2. $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & P(0)Q'(0) \end{array}$, φ_2 *est une forme bilinéaire non symétrique sur* $\mathbb{R}[X]$
3. $\varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & P(0)'Q'(0) \end{array}$, φ_3 *est une forme bilinéaire symétrique sur* $\mathbb{R}[X]$
4. $\varphi_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P, Q) & \mapsto & P(0) + Q'(0) \end{array}$, φ_4 *n'est pas une forme bilinéaire sur* $\mathbb{R}[X]$

Définition 8 (produit scalaire)
Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, $<,>$ est un produit scalaire sur E si

1. $<,>$ *est une application de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{R}$
2. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & <\vec{x}, \vec{z}> \end{array}$ *est linéaire* *($<,>$ est linéaire à droite)*
3. $\forall (x, y) \in E^2$, $<\vec{x}, \vec{y}> = <\vec{y}, \vec{x}>$ *(on dit que $<,>$ est symétrique)*
4. $\forall \vec{x} \in E$, $<\vec{x}, \vec{x}> \geqslant 0$ *et* $<\vec{x}, \vec{x}> = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ *(on dit que $<,>$ est définie positive).*

On dit que $<,>$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Définition 9

1. *On appelle espace préhilbertien réel, et on note $(E, <,>)$:*
   un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $<,>$.
2. *On appelle espace euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.*

Proposition 2 (Norme associée)
Soit $(E, <,>)$ un espace préhilbertien réel : Pour $\vec{x} \in E$ on pose $\| \vec{x} \| = \sqrt{<\vec{x}, \vec{x}>}$
$(E, \|\ \|)$ est un espace vectoriel normé, on dit que $\|\ \|$ est une norme euclidienne.

Propriétés 2 *Soit $(E,<,>)$ un espace préhilbertien réel de norme euclidienne associée $\| \|$, $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$ on a :*

1. $|<\vec{x},\vec{y}>| \leqslant \| \vec{x} \| . \| \vec{y} \|$ *avec égalité si et seulement si $(\vec{x},\vec{y})$ est un système lié. (inégalité de Cauchy Schwarz)*
2. $\| \vec{x} \| = \sup\limits_{\|\vec{z}\| \leqslant 1} |<\vec{x},\vec{z}>|$
3. $\| \vec{x}+\vec{y} \|^2 + \| \vec{x}-\vec{y} \|^2 = 2(\| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2)$ *(identité du parallélogramme)*
4. $\forall \vec{z} \in E, \quad \| \vec{x}-\vec{z} \|^2 + \| \vec{y}-\vec{z} \|^2 = 2 \| \dfrac{\vec{x}+\vec{y}}{2} - \vec{z} \|^2 + \dfrac{1}{2} \| \vec{x}-\vec{y} \|^2$ *(formule de la médiane)*
5. $\| \vec{x}+\vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2 + 2 <\vec{x},\vec{y}>$
6. $<\vec{x},\vec{y}> = \dfrac{1}{2}(\| \vec{x}+\vec{y} \|^2 - \| \vec{x} \|^2 - \| \vec{y} \|^2)$ *(identité de polarisation)*
7. $<\vec{x},\vec{y}> = \dfrac{1}{4}(\| \vec{x}+\vec{y} \|^2 - \| \vec{x}-\vec{y} \|^2)$ *(deuxième identité de polarisation)*

Les propriétés 6. et 7. indiquent que si une norme d'un espace vectoriel normé est euclidienne alors il n'existe qu'un seul produit scalaire associé.

Exemple 2

1. *Soit n un entier naturel non-nul et $E = \mathbb{R}^n$, on pose pour $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E$, $N_2(\vec{x}) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2}$, (E, N_2) est un espace vectoriel normé euclidien, le produit scalaire est défini par :*
   si $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $<\vec{x},\vec{y}> = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$
2. *Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions numériques continues sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose pour $f \in E$, $N_2(f) = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$, (E, N_2) est un espace préhilbertien réel, le produit scalaire est défini par : si $(f,g) \in E^2$, $<f,g> = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$*
3. *Soit $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, on pose pour $f \in E$, $N_2(f) = \dfrac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$, (E, N_2) est un espace préhilbertien réel, le produit scalaire est défini par : si $(f,g) \in E^2$, $<f,g> = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$*
4. *Soit $E = \ell^2(\mathbb{R})$ avec $\ell^2(\mathbb{R}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \sum\limits_{n \geqslant 0} |u_n|^2 \text{ converge}\}$, on pose pour $U \in E$, $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,*
   $N_2(U) = \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, (E, N_2) est un espace préhilbertien réel, le produit scalaire est défini par :
   si $(U,V) \in E^2$, $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $<U,V> = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$

1.2.6 Espaces préhilbertiens complexes

Définition 10 (forme sesquilinéaire)
Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, $<,>$ est une forme sesquilinéaire sur E si

1. *$<,>$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$*
2. *$<,>$ est linéaire à droite et semi-linéaire à gauche, c'est à dire : $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, $\forall(\lambda, \vec{z}_1, \vec{z}_2) \in \mathbb{C} \times E \times E$:*
   a) *$<\vec{x}, \vec{z}_1 + \vec{z}_2> = <\vec{x},\vec{z}_1> + <\vec{x},\vec{z}_2>$ et $<\vec{x}, \lambda\vec{z}_1> = \lambda <\vec{x},\vec{z}_1>$ ($<,>$ est linéaire à droite).*
   b) *$<\vec{z}_1 + \vec{z}_2, \vec{y}> = <\vec{z}_1,\vec{y}> + <\vec{z}_2,\vec{y}>$ et $<\lambda\vec{z}_1, \vec{y}> = \bar{\lambda} <\vec{z}_1,\vec{y}>$ ($<,>$ est semi-linéaire à gauche).*

Si de plus $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2, \overline{<\vec{y},\vec{x}>} = <\vec{x},\vec{y}>$ (symétrie hermitienne),
on dit que $<,>$ est une forme sesquilinéaire hermitienne sur E

Exemple 3

1. $\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C} \\ ((x,y),(x',y')) & \mapsto & \bar{x}x' - 2\bar{x}y' + 3\bar{y}x' + 5\bar{y}y' \end{array}$,
   φ_1 est une forme sesquilinéaire non hermitienne sur $\mathbb{C}^2$
2. $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C} \\ (P,Q) & \mapsto & \overline{P(0)}Q'(0) \end{array}$, *φ_2 est une forme sesquilinéaire non hermitienne sur $\mathbb{C}[X]$*
3. $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C} \\ (P,Q) & \mapsto & \overline{P(0)'}Q'(0) \end{array}$, *φ_2 est une forme sesquilinéaire hermitienne sur $\mathbb{C}[X]$*
4. $\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C} \\ (P,Q) & \mapsto & P(0)+Q'(0) \end{array}$, *φ_3 n'est pas une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}[X]$*

Définition 11 (produit scalaire hermitien)
Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, $<,>$ est un produit scalaire sur E, on dit aussi produit scalaire hermitien sur E si

1. *$<,>$ est une application de $E\times E$ dans $\mathbb{C}$*
2. $\forall \vec{x}\in E,\ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & <\vec{x},\vec{z}> \end{array}$ *est linéaire (<, > est linéaire à droite)*
3. $\forall (x,y)\in E^2,\ \ \overline{<\vec{y},\vec{x}>} = <\vec{x},\vec{y}>$ *(on dit que <, > est à symétrie hermitienne)*
4. $\forall \vec{x}\in E,\ <\vec{x},\vec{x}>\geqslant 0$ *et* $<\vec{x},\vec{x}>=0 \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$ *(on dit que <, > est définie positive).*

On dit que $<,>$ est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

Définition 12

1. *On appelle espace préhilbertien complexe, et on note $(E,<,>)$:*
   un $\mathbb{C}$ espace vectoriel E muni d'un produit scalaire hermitien $<,>$.
2. *On appelle espace hermitien un espace préhilbertien complexe de dimension finie.*

Proposition 3 (Norme associée)
Soit $(E,<,>)$ un espace préhilbertien complexe : Pour $\vec{x}\in E$ on pose $\parallel \vec{x}\parallel = \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}$
$(E,\parallel\ \parallel)$ est un espace vectoriel normé, on dit que $\parallel\ \parallel$ est une norme euclidienne on dit aussi norme hermitienne.

Propriétés 3
Soit $(E,<,>)$ un espace préhilbertien complexe de norme euclidienne associée $\parallel\ \parallel$, $\forall(\vec{x},\vec{y})\in E^2$ on a :

1. $|<\vec{x},\vec{y}>|\leqslant \parallel\vec{x}\parallel . \parallel\vec{y}\parallel$ *avec égalité si et seulement si $(\vec{x},\vec{y})$ est un système lié. (inégalité de Cauchy Schwarz)*
2. $\forall \vec{x}\in E,\ \parallel\vec{x}\parallel = \sup\limits_{\parallel\vec{y}\parallel\leqslant 1} |<\vec{x},\vec{y}>|$
3. $\parallel\vec{x}+\vec{y}\parallel^2 + \parallel\vec{x}-\vec{y}\parallel^2 = 2(\parallel\vec{x}\parallel^2 + \parallel\vec{y}\parallel^2)$ *(identité du parallélogramme)*
4. $\forall \vec{z}\in E,\ \ \parallel\vec{x}-\vec{z}\parallel^2 + \parallel\vec{y}-\vec{z}\parallel^2 = 2\parallel\dfrac{\vec{x}+\vec{y}}{2}-\vec{z}\parallel^2 + \dfrac{1}{2}\parallel\vec{x}-\vec{y}\parallel^2$ *(formule de la médiane)*
5. $\parallel\vec{x}+\vec{y}\parallel^2 = \parallel\vec{x}\parallel^2 + \parallel\vec{y}\parallel^2 + 2\mathrm{Re}(<\vec{x},\vec{y}>)$
6. $\parallel\vec{x}+i\vec{y}\parallel^2 = \parallel\vec{x}\parallel^2 + \parallel\vec{y}\parallel^2 - 2\mathrm{Im}(<\vec{x},\vec{y}>)$
7. $<\vec{x},\vec{y}> = \dfrac{1}{4}(\parallel\vec{x}+\vec{y}\parallel^2 - \parallel\vec{x}-\vec{y}\parallel^2) + \dfrac{i}{4}(\parallel\vec{x}-i\vec{y}\parallel^2 - \parallel\vec{x}+i\vec{y}\parallel^2)$ *(identité de polarisation)*

La propriété 7. indique que si une norme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé est euclidienne alors il n'existe qu'un seul produit scalaire associé.

Exemple 4

1. *Soit n un entier naturel non-nul et $E=\mathbb{C}^n$, on pose pour $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)\in E$, $N_2(\vec{x}) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^2}$, (E,N_2) est un espace vectoriel normé hermitien, le produit scalaire est défini par :*
   si $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$, $<\vec{x},\vec{y}> = \sum\limits_{k=1}^{n}\overline{x}_k y_k$

2. *Soit* $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ *le* $\mathbb{C}$ *espace vectoriel des fonctions numériques continues sur un intervalle* $[a,b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$*, on pose pour* $f \in E$, $N_2(f) = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$, (E, N_2) *est un espace préhilbertien complexe, le produit scalaire est défini par : si* $(f,g) \in E^2$, $< f, g >= \int_a^b \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t$
3. *Soit* $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ *le* $\mathbb{C}$ *espace vectoriel des fonctions numériques continues sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *et* 2π*-périodique, on pose pour* $f \in E$, $N_2(f) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$, (E, N_2) *est un espace préhilbertien complexe, le produit scalaire est défini par : si* $(f,g) \in E^2$, $< f, g >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t$
4. *Soit* $E = \ell^2(\mathbb{C})$ *avec* $\ell^2(\mathbb{C}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{C}),\ \sum_{n\geqslant 0} |u_n|^2$ *converge*$\}$*, on pose pour* $U \in E$, $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

   $N_2(U) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, (E, N_2) *est un espace préhilbertien complexe, le produit scalaire est défini par :*

   si $(U,V) \in E^2$, $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $< U, V >= \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{u}_k v_k$

1.3 Distance associée à une norme

Définition 13 *Soit* A *un ensemble non-vide,* d *est une distance sur* A *si :*

1. d *est une application de* $A \times A$ *dans* $\mathbb{R}_+$
2. $\forall (x,y) \in A^2,\ \mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$ *(* d *est symétrique)*
3. $\forall (x,y) \in A^2, \quad \mathrm{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(on dit que* d *sépare les points)*
4. $\forall (x,y,z) \in A^3, \quad \mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$ *(inégalité triangulaire)*

On dit que (A, d) *est un espace métrique.*

Proposition 4
Si d *est une distance sur un ensemble* A *non-vide on a :* $\forall (x,y,z) \in A^3,\ |\mathrm{d}(x,z) - \mathrm{d}(y,z)| \leqslant \mathrm{d}(x,y)$
(seconde inégalité triangulaire)

Proposition 5
Si $(E, \|\ \|)$ *est un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel normé Alors l'application* d *définie par :*

$$\mathrm{d}: \begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \| \vec{x} - \vec{y} \| \end{array}$$

est une distance sur E

Dans la suite les distances considérées seront des distances associées à une norme d'un espace vectoriel normé.

Définition 14 (distance d'un point à une partie)
Soit $(E, \|\ \|)$ *un espace vectoriel normé,* $\vec{x} \in E$ *et* V *une partie de* E*, on appelle distance de* $\vec{x}$ *à* V *et on note* $\mathrm{d}(\vec{x}, V)$ *le réel positif :* $\mathrm{d}(\vec{x}, V) = \inf_{\vec{y} \in V} \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y})$

Définition 15 (distance de deux parties)
Soit $(E, \|\ \|)$ *un espace vectoriel normé,* V *et* W *deux parties de* E*, on appelle distance de* V *à* W *et on note* $\mathrm{d}(V, W)$ *le réel positif :* $\mathrm{d}(V, W) = \inf_{(\vec{x}, \vec{y}) \in V \times W} \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y})$

Proposition 6 (distance induite)
Si $(E, \|\ \|)$ *est un espace vectoriel normé de distance associée* d *et* A *est une partie non vide de* E*, la restriction* d_A *de* d *à* $A \times A$ *définit une distance sur* A*,* d_A *est appelée distance induite par* d *à* A*.*
$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in A^2,\ \mathrm{d}_A(\vec{x}, \vec{y}) = \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y})$ *soit* $\mathrm{d}_A(\vec{x}, \vec{y}) = \| \vec{x} - \vec{y} \|$.

Définition 16 (Boules)
Soit (A, d) *un espace métrique et* $(a, r) \in A \times [0, +\infty[$

1. *On appelle boule ouverte de centre* a *et de rayon* r *la partie de* A *définie par :* $BO(a, r) = \{x \in A, \, \mathrm{d}(x, a) < r\}$
2. *On appelle boule fermée de centre* a *et de rayon* r *la partie de* A *définie par :* $BF(a, r) = \{x \in A, \, \mathrm{d}(x, a) \leqslant r\}$

Si $(E, \| \, \|)$ est un espace vectoriel normé on a :

- $BO(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in E, \, \| \, \vec{x} - \vec{a} \, \| < r\}$
- $BF(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in E, \, \| \, \vec{x} - \vec{a} \, \| \leqslant r\}$

1.4 Applications Lipschitziennes

Définition 17
Soit $(E, \| \, \|_E)$, $(F, \| \, \|_F)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés,* $A \subset E$ *une partie non-vide de* E *et* f *une application de* A *dans* F, $\quad f \in \mathscr{F}(A, F)$

1. *Pour* $k \in [0, +\infty]$*, on dit que* f *est* k*-Lipschitzienne sur* A *si* $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in A^2$, $\| \, f(\vec{x}) - f(\vec{y}) \, \|_F \leqslant k \, \| \, \vec{x} - \vec{y} \, \|_E$
2. *On dit que* f *est Lipschitzienne s'il existe* $k \in [0, +\infty[$ *tel que* f *soit* k*-Lipschitzienne.*
3. *On dit que* f *est contractante s'il existe* $k \in [0, 1[$ *tel que* f *soit* k*-Lipschitzienne.*

Proposition 7
Soit $(E, \| \, \|)$ *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé*

1. $\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \vec{x} & \mapsto & \| \, \vec{x} \, \| \end{array}$ *est une application* 1*-Lipschitzienne.*
2. *Soit* $A \subset E$, $A \neq \varnothing$, $\begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ \vec{x} & \mapsto & \mathrm{d}(\vec{x}, A) \end{array}$ *est une application* 1*-lispchitzienne.*

Proposition 8
Soit $(E, \| \, \|_E)$, $(F, \| \, \|_F)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés,* $A \subset E$ *une partie non-vide de* E *et* $Lips(A, F)$ *l'ensemble des applications lipschitziennes sur* A *à valeurs dans* F*.*
$(Lips(A, F), +, .)$ *est un sous-espace vectoriel de* $(\mathscr{F}(A, F), +, .)$

Proposition 9
Soit $(E, \| \, \|_E)$, $(F, \| \, \|_F)$, $(G, \| \, \|_G)$ *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés,* $A \subset E$ *une partie non-vide de* E*,* $B \subset F$ *une partie non-vide de* F*,* $f : A \mapsto B$*,* $\quad g : B \mapsto G$ *deux applications, on considère* $g \circ f : A \mapsto G$*.*
Si $\quad f$ *est* k_1*-lipschitzienne et* g *est* k_2*-lipschitzienne*
Alors $g \circ f$ *est* $k_1 k_2$*-lipschitzienne.*
La composée de deux applications lipschitziennes est une application lipschitzienne.

1.5 Produit d'espaces vectoriels normés

Proposition 10
Soit $(E, \| \, \|_E)$ *et* $(F, \| \, \|_F)$ *deux espaces vectoriels normés. On pose pour* $(\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$ *:*
$N_\infty((\vec{x}, \vec{y})) = \sup(\| \, \vec{x} \, \|_E, \| \, \vec{y} \, \|_F)$*,* N_∞ *est une norme sur l'espace vectoriel produit* $E_1 \times E_2$
$(E_1 \times E_2, N_\infty)$ *est un espace vectoriel normé appelé espace vectoriel normé produit des espaces vectoriels normés* $(E, \| \, \|_E)$ *et* $(F, \| \, \|_F)$*.*

Plus généralement :

Proposition 11
Soit $(E_k, \| \, \|_k)$*,* $k \in [\![1, p]\!]$*,* p *espaces vectoriels normés,*
pour $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ *on pose :*
$N_\infty((\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)) = \sup(\| \, \vec{x}_1 \, \|_1, \ldots, \| \, \vec{x}_p \, \|_p)$
N_∞*, est une norme sur l'espace vectoriel produit* $E_1 \times \cdots \times E_p$*.*
$(E_1 \times \cdots \times E_p, N_\infty)$ *est appelé espace vectoriel normés produit des espaces vectoriels normés* $(E_k, \| \, \|_k)$*.*

Remarque 3

- *Si on pose : pour* $(E, \| \|_E)$ *et* $(F, \| \|_F)$ *deux espaces vectoriels normés :*
  $N_1((\vec{x}, \vec{y})) = \| \vec{x} \|_E + \| \vec{y} \|_F, \quad N_2((\vec{x}, \vec{y})) = \sqrt{\| \vec{x} \|_E^2 + \| \vec{y} \|_F^2}$
  $N_1,\ N_2$ *sont deux normes sur* $E \times F$
  $(E \times F, N_1)$, $(E \times F, N_2)$ *sont deux espaces vectoriels normés.*
- *Soit* $(E_k, \| \|_k)$, $k \in [\![1, p]\!]$, p *espaces vectoriels normés,*
  pour $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ *on pose :*
  $N_1((\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)) = \| \vec{x}_1 \|_1 + \cdots + \| \vec{x}_p \|_p$, $N_2((\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)) = \sqrt{\| \vec{x}_1 \|_1^2 + \cdots + \| \vec{x}_p \|_p^2}$
  N_1 *et* N_2 *sont deux normes sur l'espace vectoriel produit* $E_1 \times \cdots \times E_p$.
  $(E_1 \times \cdots \times E_p, N_1)$ *et* $(E_1 \times \cdots \times E_p, N_2)$ *sont deux espaces vectoriels normés.*

Proposition 12

Les applications linéaires coordonnées : $\begin{array}{ccc} (E_1 \times \cdots \times E_p, N_i) & \to & (E_k, \| \|_k) \\ (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) & \mapsto & \vec{x}_k \end{array}$
sont des applications linéaires 1*-lipschitziennes pour* $i \in \{\infty, 1, 2\}$.

1.6 Comparaison de normes

Définition 18

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et* $\| \|_1$, $\| \|_2$ *deux normes sur* E.
On dit que $\| \|_1$ *est plus fine que* $\| \|_2$, *on notera* $\| \|_2 \prec \| \|_1$ *s'il existe* $k > 0$ *tel que* $\forall \vec{x} \in E,\ \| \vec{x} \|_2 \leqslant k \| \vec{x} \|_1$

Définition 19

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et* $\| \|_1$, $\| \|_2$ *deux normes sur* E.
On dit que $\| \|_1$ *équivalente à* $\| \|_2$, *on notera* $\| \|_2 \sim \| \|_1$ *s'il existe* $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ *tel que*
$\forall \vec{x} \in E,\ k_1 \| \vec{x} \|_1 \leqslant \| \vec{x} \|_2 \leqslant k_2 \| \vec{x} \|_1$

Proposition 13

Soit E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé et* $\| \|_1$, $\| \|_2$ *deux normes sur* E.
On a : $\| \|_1 \sim \| \|_2$ *si et seulement si* $\| \|_1 \prec \| \|_2$ *et* $\| \|_2 \prec \| \|_1$

Proposition 14

Pour un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel la relation d'équivalence pour les normes sur* E *est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de* E.

Théorème 1

Dans un $\mathbb{K}$ *espace vectoriel de dimension finie les normes sont équivalentes deux à deux.*

Exemple 5

1. *Dans* $\mathbb{K}^n$ *les normes sont équivalentes deux à deux car* $\mathbb{K}^n$ *est de dimension finie, on a par exemple :*
   - $\forall \vec{x} \in E\ \| \vec{x} \|_\infty \leqslant \| \vec{x} \|_1 \leqslant n \| \vec{x} \|_\infty$ *d'où* $\| \|_\infty \sim \| \|_1$
   - $\forall \vec{x} \in E\ \| \vec{x} \|_\infty \leqslant \| \vec{x} \|_2 \leqslant \sqrt{n} \| \vec{x} \|_\infty$ *d'où* $\| \|_\infty \sim \| \|_2$
   - $\forall \vec{x} \in E\ \| \vec{x} \|_2 \leqslant \| \vec{x} \|_1 \leqslant \sqrt{n} \| \vec{x} \|_2$ *d'où* $\| \|_1 \sim \| \|_2$
2. *Pour* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$,
   $$\forall f \in E,\ \| f \|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|,\ \| f \|_1 = \int_a^b |f(t)| \mathrm{d}t \text{ et } \| f \|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$$
   On a

   Proposition 15
   Si $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ *Alors*
   - $\left| \int_a^b f(t) \mathrm{d}t \right| \leqslant \| f \|_1 \leqslant (b - a) \| f \|_\infty$
   - $\| f \|_2 \leqslant \sqrt{b - a} \| f \|_\infty$
   - $\| f \|_1 \leqslant \sqrt{b - a} \| f \|_2$

   $\| \|_1 \prec \| \|_\infty$, $\| \|_2 \prec \| \|_\infty$ *et* $\| \|_1 \prec \| \|_2$. *Les normes deux à deux ne sont pas équivalentes.*
3. *Dans* $\ell^1(\mathbb{K})$ *:* $N_\infty \prec N_1$, $N_\infty \prec N_2$, $N_2 \prec N_1$. *Les normes ne sont pas quivalentes deux à deux.*

4. *Dans $\ell^2(\mathbb{K})$: $N_\infty \prec N_2$, les normes ne sont pas quivalentes.*
5. *Soit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ avec $(E_k, \|\ \|_k)$, $k \in [\![1,p]\!]$ p espaces vectoriels normés, on pose*
$$\forall \vec{x} = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E,\ N_\infty(\vec{x}) = \sup_{1 \leqslant k \leqslant p} (\| \vec{x} \|_k), \quad N_1(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{p} \| \vec{x}_k \|_k \text{ et } N(\vec{x})_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} \| \vec{x}_k \|_k^2}$$
Les normes N_∞, N_1, N_2 sont des normes sur E équivalentes deux à deux.

2 Suites

2.1 Convergence

Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé.
On notera :

- $\mathcal{S}(E)$ le $\mathbb{K}$ espace vectoriel des suites de E, $\mathcal{S}(E) = \mathscr{F}(\mathbb{N}, E)$
- $\ell^\infty(E) = \mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(E)$ des suites bornées de E (voir définition 5) $(\ell^\infty(E), N_\infty)$ est un espace vectoriel normé avec $\forall u \in \ell^\infty(E)$, $N_\infty(u) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} \| \vec{u}_n \|$ (voir 1.2.4)

Définition 20
Soit $u \in \mathcal{S}(E)$, $u = (\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on dit que la suite $(\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E s'il existe $\vec{\ell} \in E$ tel que :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \| \vec{u}_n - \vec{\ell} \| \leqslant \varepsilon$$
on dit que la suite $(\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\vec{\ell}$, on note $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{u}_n = \vec{\ell}$ ou $\lim u = \vec{\ell}$
On dit qu'une suite de E est convergente si elle converge dans E, si elle ne converge pas dans E on dit qu'elle est divergente.

Proposition 16
Si une suite de E converge alors sa limite est unique.

Propriétés 4
Soit $\ell_c(E)$ l'ensemble des suites convergentes de E

P1 $u \in \mathcal{S}(E)$, $u = (\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *on a* $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{u}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \| \vec{u}_n \| = 0$ *dans* $\mathbb{R}$

P2 $u \in \mathcal{S}(E)$, $u = (\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\vec{\ell} \in E$ *on a* $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{u}_n = \vec{\ell} \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \| \vec{u}_n - \vec{\ell} \| = 0$

P3 $\ell_c(E)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\ell^\infty(E)$

P4 $(\ell_c(E), N_\infty)$ *est un espace vectoriel normé.*

P5 *l'application* $\varphi : \begin{array}{ccc} \ell_c(E) & \to & E \\ u = (\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & \lim\limits_{n \to +\infty} \vec{u}_n \end{array}$ *est une application linéaire,* $\varphi \in L(\ell_c(E), E)$

Proposition 17

- *Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{u}_n = \vec{\ell}$ dans un espace vectoriel normé (E, N_1) et N_2 est une autre norme sur E avec N_1 plus fine que N_2, $N_2 \prec N_1$*
  Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{u}_n = \vec{\ell}$ dans (E, N_2).
- *Si deux normes sur E sont équivalentes alors elles définissent les mêmes suites convergentes et deux suites convergentes ont la même limite pour les deux normes.*

Théorème 2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, N_1 et N_2 deux normes sur E.

1. *$N_2 \prec N_1$ si et seulement si toute suite de E convergeant vers $\vec{0}$ pour N_1 converge vers $\vec{0}$ pour N_2.*
2. *$N_1 \sim N_2$ si et seulement si (E, N_1) et (E, N_2) ont les mêmes suites convergeant vers $\vec{0}$*
3. *$N_1 \sim N_2$ si et seulement si (E, N_1) et (E, N_2) ont les mêmes suites convergentes.*

Proposition 18
Soit $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E muni de $\|\ \|_F$ la norme induite par celle de E. Si $(\vec{u}_n)_n$ est une suite de F convergeant vers $\vec{u} \in F$ dans l'espace vectoriel normé $(F, \|\ \|_F)$ alors $(\vec{u}_n)_n$ converge vers $\vec{u}$ dans $(E, \|\ \|)$

Attention la réciproque est fausse en général par exemple si $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on considère $(E,\|\ \|_\infty)$, F le sous-espace vectoriel de E des fonctions polynômes, la suite de F, $(P_n)_n$ avec $\forall n\in\mathbb{N},\ P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ et la fonction f de E définie par $f(x)=e^x$, on a $(P_n)_n$ converge vers f dans $(E,\|\ \|_\infty)$ mais diverge dans $(F,\|\ \|_F)$ où $\|\ \|_F=\|\ \|_{\infty|F}$.

Proposition 19
Soit (E_k,N_k), $k\in[\![1,d]\!]$ d espaces vectoriels normés et (E,N_∞) l'espace vectoriel normé produit, $\vec{x}=(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_d)$, $N_\infty(\vec{x})=\sup_{k\in[\![1,d]\!]}N_k(\vec{x_k})$. Soit $(\vec{u}_n)_n$ une suite de E avec $\vec{u}_n=(\vec{u}_{1n},\dots,\vec{u}_{dn})$.
On a $\lim_{n\to+\infty}\vec{u}_n=\vec{\ell}$, $\vec{\ell}=(\vec{\ell}_1,\dots,\vec{\ell}_d)$ dans (E,N_∞) si et seulement si $\forall i\in[\![1,d]\!]$, $\lim_{n\to+\infty}\vec{u}_{in}=\vec{\ell}_i$

2.2 Suites extraites

Définition 21
Soit $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace vectoriel normé $(E,\|\ \|)$ et $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une application strictement croissante, la suite $v=u\circ\varphi$, soit $v=(\vec{u}_{\varphi(k)})$ est une suite extraite de u.
Souvent $\varphi(k)$ se note n_k et la suite extraite v se note $v=(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$

Remarque 4 *Si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n)\geqslant n$*

Proposition 20
Si $\lim_{n\to+\infty}\vec{u}_n=\vec{\ell}$ Alors pour toute suite extraite $(\vec{u}_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim_{k\to+\infty}\vec{u}_{\varphi(k)}=\vec{\ell}$

Définition 22
Soit $(\vec{u}_n)_n$ une suite d'un espace vectoriel normé (E,N), $\vec{\ell}\in E$.
On dit que $\vec{\ell}$ est une valeur d'adhérence de la suite $(\vec{u}_n)_n$ s'il existe une suite extraite $(\vec{u}_{\varphi(n)})_n$ telle que $\lim_{n\to+\infty}\vec{u}_{\varphi(n)}=\vec{\ell}$

Proposition 21

1. *Une suite convergente possède pour unique valeur d'adhérence sa limite.*
2. *Une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérences est divergente.*

2.3 Relations de comparaison

2.3.1 Domination

Définition 23
Soit (E,N) un espace vectoriel normé, $(\vec{u}_n)_n$ une suite de E et $(\alpha_n)_n$ une suite réelle.
On dit $(\vec{u}_n)_n$ est dominée par la suite $(\alpha_n)_n$ et on note $\vec{u}_n=\bigcirc(\alpha_n)$ s'il existe $M\in\mathbb{R}_+,n_0\in\mathbb{N}$ tels que $\forall n\geqslant n_0$, $N(\vec{u}_n)\leqslant M|\alpha_n|$

Remarque 5

1. *$\vec{u}_n=\bigcirc(\alpha_n)\ \Leftrightarrow\ N(\vec{u}_n)=\bigcirc(|\alpha_n|)$*
2. *Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n\neq 0$ on a $\vec{u}_n=\bigcirc(\alpha_n)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{\alpha_n}\vec{u}_n\right)_n$ est une suite bornée.*
3. *$\vec{u}_n=\bigcirc(1)$ est équivalent à $(\vec{u}_n)_n$ est une suite bornée.*

2.3.2 Négligeabilité

Définition 24
Soit (E,N) un espace vectoriel normé, $(\vec{u}_n)_n$ une suite de E et $(\alpha_n)_n$ une suite réelle.
On dit $(\vec{u}_n)_n$ est négligeable devant la suite $(\alpha_n)_n$ et on note $\vec{u}_n=o(\alpha_n)$ si $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ tels que $\forall n\geqslant N$, $N(\vec{u}_n)\leqslant\varepsilon|\alpha_n|$

Remarque 6

1. *$\vec{u}_n=o(\alpha_n)\ \Leftrightarrow\ N(\vec{u}_n)=o(|\alpha_n|)$*
2. *Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n\neq 0$ on a $\vec{u}_n=o(\alpha_n)\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\alpha_n}\vec{u}_n=\vec{0}$.*
3. *$\vec{u}_n=o(1)$ est équivalent à $\lim_{n\to+\infty}\vec{u}_n=\vec{0}$.*

2.3.3 Equivalence

Définition 25
Soit (E, N) un espace vectoriel normé, $(\vec{u}_n)_n$ et $(\vec{v}_n)_n$ deux suites de E.
On dit $(\vec{u}_n)_n$ est équivalente à $(\vec{v}_n)_n$ et on note $\vec{u}_n \sim \vec{v}_n$ si $\vec{u}_n - \vec{v}_n = o(N(\vec{v}_n))$

Propriétés 5

1. *Si $\vec{u}_n \sim \vec{v}_n$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \vec{u}_n = \vec{L} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \vec{v}_n = \vec{L}$.*
2. *Si $\vec{L} \neq \vec{0}$ on a $\vec{u}_n \sim \vec{L} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \vec{u}_n = \vec{L}$*
3. *$\vec{u}_n \sim \vec{v}_n \Rightarrow N(\vec{u}_n) \sim N(\vec{v}_n)$*
4. *$\vec{u}_n \sim \vec{v}_n \Rightarrow \vec{u}_n = \bigcirc(\vec{v}_n)$ et $\vec{v}_n = \bigcirc(\vec{u}_n)$.*
5. *Si $E = \mathbb{K}$, $(x_n)_n \in \mathcal{S}(E)$, $(y_n)_n \in \mathcal{S}(E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \neq 0$ Alors $x_n \underset{\infty}{\sim} y_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$*

2.4 Suites de Cauchy

Définition 26
Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(E)$. On dit que $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété de Cauchy, on dit aussi que $(\vec{u}_n)_n$ est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \textit{tel que } n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \| \vec{u}_{n+p} - \vec{u}_n \| \leqslant \varepsilon$$

Soit $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(E)$ l'ensemble des suites de Cauchy de E

Propriétés 6

- P1 *$\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$*
- P2 *Toute suite convergente est une suite de Cauchy : $\ell_c(E) \subset \mathscr{C}_{\mathbb{N}}(E)$*
- P3 *Toute suite de Cauchy est bornée : $\mathscr{C}_{\mathbb{N}}(E) \subset \ell^\infty(E)$*
- P4 *Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence alors elle converge.*

Proposition 22
Des normes équivalentes définissent les mêmes suites de Cauchy.
C'est à dire si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et N, N' sont deux normes équivalentes sur E, les espaces vectoriels normés (E, N) et (E, N') ont les mêmes suites de cauchy.

Définition 27 (Espace de Banach)
On appelle espace de Banach un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (E, N) dans lequel les suites de Cauchy convergent.

Définition 28
Soit (E, N) un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie non vide de E. A est une partie complète de E si les suites de Cauchy de A convergent dans A.

Remarque 7 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Proposition 23
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, N et N' deux normes équivalentes sur E, (E, N) est un espace de Banach si et seulement si (E, N') est un espace de Banach.

Théorème 3
Un espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

Proposition 24
Soit (E, N) et (E', N') deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, on suppose qu'il existe une isométrie vectorielle de (E, N) sur (E', N') :
(E, N) est un espace de Banach si et seulement si (E', N') est un espace de Banach.

Proposition 25
Si (E_k, N_k), $k \in [\![1, p]\!]$ sont p $\mathbb{K}$-espaces de Banach
Alors l'espace vectoriel normé produit (E, N) ($\forall \vec{x} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E$, $N(\vec{x}) = \sup\limits_{k\in[\![1,p]\!]} N_k(\vec{x}_k)$) est un espace de Banach.

On en déduit :

Proposition 26

1. $(\mathbb{R}^n, \| \ \|)$ *est un espace de Banach où* $\| \ \|$ *est une norme sur* $\mathbb{R}^n$
2. $(\mathbb{C}^n, \| \ \|)$ *est un espace de Banach où* $\| \ \|$ *est une norme sur* $\mathbb{C}^n$

Définition 29 (Espace de Hilbert)
On appelle espace de Hilbert un espace préhilbertien réel ou complexe complet.

Proposition 27

1. $(\mathbb{R}^n, <\,,\,>)$ *l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n$ *muni de son produit scalaire usuel est un espace de Hilbert réel.*
2. $(\mathbb{C}^n, <\,,\,>)$ *l'espace vectoriel* $\mathbb{C}^n$ *muni de son produit scalaire usuel est un espace de Hilbert complexe.*
   D'une manière générale :
3. *Un espace euclidien est un un espace de Hilbert réel*
4. *Un espace hermitien est un espace de Hilbert complexe.*

Exercice 1

1. *Soit* A *un ensemble non vide et* (E, N) *un espace de Banach*
   montrer que $(\mathcal{B}(A, E), N_\infty)$ *(voir 1.2.4) est un espace de Banach.*
2. *Montrer que* $(\ell^\infty(\mathbb{K}), N_\infty)$ *et* $(\ell^1(\mathbb{K}), N_1)$ *sont des espaces de Banach.*
3. *Montrer que* $(\ell^2(\mathbb{K}), N_2)$ *est un espace de Hilbert.*
4. *Montrer que* $\ell^1(\mathbb{K})$ *n'est pas une partie fermée de* $(\ell^2(\mathbb{K}), N_2)$*, en déduire que* $(\ell^1(\mathbb{K}), N_2)$ *n'est pas un espace de Banach.*

3 Topologie

$(E, \| \ \|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

3.1 Ouvert

Définition 30
Une partie A *de* E *est un ensemble ouvert si* $\forall \vec{x} \in A$, $\exists r > 0$, $BO(\vec{x}, r) \subset A$

Propriétés 7

P1 $\varnothing$ *et* E *sont ouverts*

P2 Une réunion d'ouverts est un ouvert.

P3 Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Proposition 28 *Soit* E *un espace vectoriel,* A *une partie de* E*,* N *et* N' *deux normes équivalentes sur* E*.*
A *est ouvert dans* (E, N) *si et seulement si* A *est ouvert dans* (E, N')
C'est à dire que des normes équivalentes définissent les mêmes ouverts.

3.2 Fermé

Définition 31
Une partie A *de* E *est un ensemble fermé si* $C_E A$ *est un ouvert où* $C_E A$ *désigne le complémentaire de* A *dans* E

Propriétés 8

P1 E *et* $\varnothing$ *sont fermés*

P2 Une intersection de fermés est un fermé.

P1 Une réunion finie de fermés est un fermé.

Proposition 29 *Soit* E *un espace vectoriel,* A *une partie de* E*,* N *et* N' *deux normes équivalentes sur* E*.*
A *est fermé dans* (E, N) *si et seulement si* A *est fermé dans* (E, N')
C'est à dire que des normes équivalentes définissent les mêmes fermés.

Proposition 30
Une partie A *de* E *est un fermé si et seulement si pour toute suite* $(\vec{u}_n)_n$ *de* A *:* $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{u}_n = \vec{\ell} \Rightarrow \vec{\ell} \in A$.

Proposition 31
Dans un espace de Banach (E, N)*, les parties complètes de* E *sont les parties fermées de* E*.*

3.3 Voisinage d'un point

Définition 32 *Soit* $\vec{a} \in E$ *et* $V \subset E$*,* V *est un voisinage de* $\vec{a}$ *si* $\exists r > 0$ *tel que* $BO(\vec{a}, r) \subset V$

Définition 33

1. *Dans* E *on appelle voisinage de l'*∞ *toute partie* V *de* E *telle qu'il existe* $R > 0$ *tel que* $C_E BF(\vec{0}, R) \subset V$
2. *Dans* $\mathbb{R}$ *on appelle voisinage de* $+\infty$*(resp.* $-\infty$*) toute partie* V *de* $\mathbb{R}$ *telle qu'il existe* $a \in \mathbb{R}$ *qui vérifie* $]a, +\infty[\subset V$ *(resp.* $]-\infty, a[\subset V$*)*

Proposition 32
Des normes équivalentes définissent les mêmes voisinages d'un vecteur de E*.*

Soit $\mathscr{V}(\vec{a})$ (resp. $\mathscr{V}(\infty)$, $\mathscr{V}(\pm\infty)$) l'ensemble des voisinages d'un vecteur $\vec{a}$ de E (resp. ∞, $\pm\infty$)

Propriétés 9

P1 *Une intersection finie de voisinage de* $\vec{a}$ *est un voisinage de* $\vec{a}$

P2 *Si* $V_1 \in \mathscr{V}(\vec{a})$ *et* $V_1 \subset V$ *alors* $V \in \mathscr{V}(\vec{a})$

Proposition 33
Soit $U \subset E$*,* U *est un ouvert de* E *si et seulement si* $\forall \vec{x} \in U, U \in \mathscr{V}(\vec{x})$

Proposition 34
Soit $(\vec{u}_n)_n$ *une suite de* E *et* $\ell \in E$ *(ou* $\ell = \infty$*,* $\ell = \pm\infty$*) on a :*
$\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{u}_n = \ell$ *si et seulement si* $\forall V \in \mathscr{V}(\ell), \quad \exists N \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \vec{u}_n \in V$

Définition 34
Soit A *une partie de* E*,* $\mathcal{P}$ *une propriété qui dépend de* $\vec{x} \in A$ *et* $\vec{a} \in \bar{A}$*, on dit que* $\mathscr{P}$ *est vraie au voisinage de* $\vec{a}$ *s'il existe* $V \in \mathscr{V}(\vec{a})$ *tel que* $\mathcal{P}$ *soit vraie pour tout* $\vec{x} \in A \cap V$

3.4 Intérieur

Définition 35
Soit $\vec{a} \in E$*, on dit que* $\vec{a}$ *est un point intérieur à la partie* A *de* E *si* A *est un voisinage de* $\vec{a}$
c'est à dire qu'il existe $r > 0$ *tel que* $BO(\vec{a}, r) \subset A$*.*

Définition 36
Soit A *une partie de* E*, on appelle intérieur de* A *et on note* $\mathring{A}$ *l'ensemble des points intérieurs à* A

Proposition 35
Soit A *une partie de* E*, l'intérieur de* A *est le plus grand ouvert de* E *au sens de l'inclusion contenu dans* A*.*
$\mathring{A} = \bigcup\limits_{\substack{O \subset A \\ O \text{ ouvert}}} O$

Proposition 36
Une partie A *de* E *est un ouvert de* E *si et seulement si* $A = \mathring{A}$

3.5 Adhérence

Définition 37
Soit $\vec{a} \in E$*, on dit que* $\vec{a}$ *est un point adhérent à la partie* A *de* E *si pour tout voisinage* V *de* $\vec{a}$ *on a* $V \cap A \neq \varnothing$*.*

Remarque 8
La définition précédente s'applique pour $a = \infty$ *et pour* $E = \mathbb{R}$*,* $a = \pm\infty$

Proposition 37
Soit $\vec{a} \in E$*,* $\vec{a}$ *est un point adhérent à la partie* A *de* E *si et seulement si il existe une suite* $(\vec{u}_n)_n$ *de vecteurs de* A *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{u}_n = \vec{a}$

Définition 38
Soit A *une partie de* E*, on appelle adhérence de* A *et on note* $\bar{A}$ *l'ensemble des points de* E *adhérents à* A

Remarque 9
On note aussi $\bar{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Proposition 38
Soit A *une partie de* E*, l'adhérence de* A *est le plus petit fermé de* E *au sens de l'inclusion contenant* A*.*
$\bar{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \subset A \\ F \text{ fermé}}} F$

Proposition 39
Une partie A *de* E *est un fermé de* E *si et seulement si* $A = \bar{A}$

Définition 39
Soit A *une partie de* E *et* $B \subset A$*, on dit que* B *est dense dans* A *si* $A \subset \bar{B}$

Proposition 40
Si A *et* B *sont deux parties de* E *avec* $B \subset A$ *alors* B *est dense dans* A *si et seulement si*
$\forall \vec{a} \in A, \forall r > 0$ *on a* $BO(\vec{a}, r) \cap B \neq \varnothing$*.*

Proposition 41
Si A *et* B *sont deux parties de* E *avec* $B \subset A$ *alors* B *est dense dans* A *si et seulement si*
$\forall \vec{a} \in A$, $\exists (\vec{u}_n)_n \in S(B)$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{u}_n = \vec{a}$*.*

Exercice 2
Soit G *un sous groupe de* $(\mathbb{R}, +)$*. Montrer que* G *vérifie l'une des propositions suivantes :*

1. $\exists a \geqslant 0$, $G = a\mathbb{Z}$
2. G *est dense dans* $\mathbb{R}$

3.6 Frontière

Définition 40
Soit A *une partie de* E*, on appelle frontière de* A *la partie de* E *notée* $Fr(A)$ *et définie par* $Fr(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

Proposition 42
Pour une partie A *de* E *on a aussi* $Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{C_E A}$

Proposition 43
Pour une partie A *de* E $Fr(A)$ *est un fermé de* E*.*

Exercice 3
Montrer que pour une partie A *de* E*,* $C_E \overset{\circ}{A} = \overline{C_E A}$

3.7 Topologie induite

Définition 41
Soit A *une partie de* E*, on appelle ouvert, fermé, voisinage d'un point de* $\bar{A}$ *relativement à* A *l'intersection d'un ouvert, d'un fermé, d'un voisinage dans* E *avec* A

4 Etude locale d'une application

$(E, \| \, \|_E)$, $(F, \| \, \|_F)$, $(G, \| \, \|_G)$ désigneront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés

4.1 Limite

Définition 42
Soit A *une partie non vide de* E*,* $\vec{a} \in \bar{A}$ *dans* E*,* $\vec{b} \in F$ *et* f *une application de* A *dans* F*. On dit que* f *admet* $\vec{b}$ *pour limite en* $\vec{a}$ *et on note* $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$ *ou* $\lim\limits_{\vec{a}} f = \vec{b}$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \vec{x} \in A, \| \vec{x} - \vec{a} \|_E \leqslant r \Rightarrow \| f(\vec{x}) - \vec{b} \|_F \leqslant \varepsilon$$

Définition équivalente avec les voisinages :

Définition 43
Soit A une partie non vide de E, $\vec{a} \in \bar{A}$ dans E, $\vec{b} \in F$ et f une application de A dans F. On dit que f admet $\vec{b}$ pour limite en $\vec{a}$ et on note $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{b}$ ou $\lim\limits_{\vec{a}} f = \vec{b}$ si :

$$\forall V \in \mathscr{V}(\vec{b}), \exists W \in \mathscr{V}(\vec{a}), f(W \cap A) \subset V$$

Remarque 10
Cette définition s'applique aussi pour $E = \mathbb{R}$ et $\vec{a} = \pm\infty$ ou $\vec{b} = \pm\infty$.
Elle s'applique aussi pour un espace vectoriel normé E, $\vec{a} \in E$, un espace vectoriel normé F et $\vec{b} = +\infty$ à la fonction $\begin{array}{rccc} f: & E & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{x} & \mapsto & \| f(\vec{x}) \|_F \end{array}$

Proposition 44
Si une fonction admet une limite en un point alors celle-ci est unique.

Proposition 45
Soit A une partie non vide de E, $\vec{a} \in A$ dans E, $\vec{b} \in F$ et f une application de A dans F.
Si f admet $\vec{b}$ pour limite en $\vec{a}$ alors $\vec{b} = f(\vec{a})$

Définition 44
Soit A une partie non vide de E, $\vec{a} \in A$ et f une application de A dans F.
On dit que f est continue en $\vec{a}$ si f admet une limite en $\vec{a}$

Définition 45
Soit A une partie non vide de E et f une application de A dans F, on dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A. On notera $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des applications continues sur A à valeurs dans F.

Proposition 46
Soit A une partie non vide de E et f une application de A dans F, $\vec{a} \in \bar{A} \setminus A$,
f admet une limite $\vec{b} \in F$ si et seulement si f admet un prolongement par continuité en $\vec{a}$ en posant $f(\vec{a}) = \vec{b}$.

Définition 46
Soit A une partie non vide de E, f une application de A dans F, P une partie de A et $\vec{a}$ un point de E adhérent à P, on dit que f admet une limite au point $\vec{a}$ selon P si la restriction de f à P admet une limite en $\vec{a}$.

Propriétés 10

P1 *Soit $\mathscr{F}_{\vec{a}c}(A, \mathscr{F})$ l'ensemble des applications de A dans F qui admettent une limite finie à valeur dans F en $\vec{a} \in \bar{A}$, on a :*
- *$\mathscr{F}_{\vec{a}c}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(A, F)$*
- *L'application* $\begin{array}{ccc} \mathscr{F}_{\vec{a}c}(A, F) & \to & F \\ f & \mapsto & \lim\limits_{\vec{a}} f \end{array}$ *est une application linéaire.*

P2 **Composée d'applications** *:*
Soit f une application de A dans B avec $A \subset E$, $B \subset F$, g une application de B dans G, $\vec{a} \in \bar{A}, \vec{b} \in \bar{B}$ et $\vec{\ell} \in G$. On a :

$$\text{Si } \lim_{\substack{\vec{t} \to \vec{a} \\ \vec{t} \in A}} f(\vec{t}) = \vec{b} \text{ et } \lim_{\substack{\vec{x} \to \vec{b} \\ \vec{x} \in B}} g(\vec{x}) = \vec{\ell} \text{ alors } \lim_{\substack{\vec{t} \to \vec{a} \\ \vec{t} \in A}} g \circ f(\vec{t}) = \vec{\ell}$$

Remarque 11 *Ce résultat s'applique si $\vec{a}$, $\vec{b}$ ou $\vec{\ell}$ ont des valeurs infinies.*

P3 ***Théorème 4***
Soit A une partie non vide de E, f une application de A dans F, $\vec{a} \in \bar{A}$, $\vec{\ell} \in F$, on a :
$\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{\ell}$ si et seulement si pour toute suite $(\vec{u}_n)_n$ de A, $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{u}_n = \vec{a} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} f(\vec{u}_n) = \vec{\ell}$.

Remarque 12 *Ce résultat s'applique si $\vec{a}$ ou $\vec{\ell}$ ont des valeurs infinies.*

Théorème 5
Soit A une partie non vide de E, f une application de A dans F, $\vec{a} \in \bar{A}$, on a :
$\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})$ *existe dans F si et seulement si pour toute suite $(\vec{u}_n)_n$ de A,*
$\lim\limits_{n\to+\infty} \vec{u}_n = \vec{a} \Rightarrow (f(\vec{u}_n))_n$ *converge dans F.*

P4 **Critère de Cauchy**

Théorème 6
Soit E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, $\vec{a} \in \bar{A}$, B une partie complète de F et $f \in \mathscr{F}(A, B)$, $\quad f : A \to B$
f admet une limite finie en $\vec{a}$ si et seulement si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in A^2, \parallel \vec{x} - \vec{a} \parallel_E \leqslant \eta, \parallel \vec{y} - \vec{a} \parallel_E \leqslant \eta \Rightarrow \parallel f(\vec{x}) - f(\vec{y}) \parallel_F \leqslant \varepsilon$

Avec les voisinages le théorème s'écrit

Théorème 7
Soit E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E, $\vec{a} \in \bar{A}$, B une partie complète de F et $f \in \mathscr{F}(A, B)$, $\quad f : A \to B$
f admet une limite finie en $\vec{a}$ si et seulement si
$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathscr{V}(\vec{a}), \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in A^2, (\vec{x}, \vec{y}) \in V^2 \Rightarrow \parallel f(\vec{x}) - f(\vec{y}) \parallel_F \leqslant \varepsilon$

Remarque 13
Le théorème s'applique si A est une partie d'un espace vectoriel normé, $\vec{a} \in \bar{A}$, F est un espace de banach (en particulier si F est un espace vectoriel de dimension finie) et $f \in \mathscr{F}(A, F)$

P5 **Produit d'espaces vectoriels normés**

Théorème 8
Soit A une partie d'un espace vectoriel normé (E, N_E), $\vec{a} \in \bar{A}$ (éventuellement $\vec{a} = \pm\infty$ si $E = \mathbb{R}$),
(F_k, N_k), $k \in [\![1, d]\!]$ d espaces vectoriels normés, (F, N_∞) l'espace vectoriel normé produit, et $f \in \mathscr{F}(A, F)$,
$f = (f_1, \dots, f_d)$, $\forall k \in [\![1, d]\!]$, $f_k \in \mathscr{F}(A, F_k)$ les fonctions f_k sont les fonctions composantes de f.
On a : $\lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in A}} f(\vec{x}) = \vec{\ell}$, $\vec{\ell} = (\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_d)$, $\vec{\ell}_k \in F_k$ si et seulement si $\forall k \in [\![1, d]\!]$, $\lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in A}} f_k(\vec{x}) = \vec{\ell}_k$

4.2 Relations de comparaison

4.2.1 Domination

Définition 47
Soit A une partie de E, $\vec{a} \in \bar{A}$ (éventuellement $E = \mathbb{R}$ et $\vec{a} = \pm\infty$), $f \in \mathscr{F}(A, F)$ et $\varphi \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.
On dit f est dominée par la fonction φ au voisinage de $\vec{a}$ et on note $f(\vec{x}) = \bigcirc_{\vec{a}}(\varphi(\vec{x}))$ ou $f = \bigcirc_{\vec{a}}(\varphi)$ s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$, $V \in \mathscr{V}(\vec{a})$ tels que $\forall \vec{x} \in A$, $\quad \vec{x} \in V \Rightarrow \parallel f(\vec{x}) \parallel_F \leqslant M|\varphi(\vec{x})|$

Remarque 14

1. $f = \bigcirc_{\vec{a}}(\varphi) \Leftrightarrow \parallel f \parallel_F = \bigcirc_{\vec{a}}(|\varphi|)$ *dans* $\mathbb{R}$
2. *Si $\forall \vec{x} \in A$, $\varphi(\vec{x}) \neq 0$ on a $f = \bigcirc_{\vec{a}}(\varphi) \Leftrightarrow \exists V \in \mathscr{V}(\vec{a})$ tel que $\dfrac{1}{\alpha_n} f$ est une fonction bornée sur V.*
3. *$f = \bigcirc_{\vec{a}}(1)$ est équivalent à f est une fonction bornée au voisinage de $\vec{a}$.*

4.2.2 Négligeabilité

Définition 48
Soit A une partie de E, $\vec{a} \in \bar{A}$ (éventuellement $E = \mathbb{R}$ et $\vec{a} = \pm\infty$), $f \in \mathscr{F}(A, F)$ et $\varphi \in \mathscr{F}(A, \mathbb{R})$.
On dit f est négligeable devant la fonction φ au voisinage de $\vec{a}$ et on note $f(\vec{x}) = \circ_{\vec{a}}(\varphi(\vec{x}))$ ou $f = \circ_{\vec{a}}(\varphi)$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists V \in \mathscr{V}(\vec{a})$ tels que $\forall \vec{x} \in A$, $\quad \vec{x} \in V \Rightarrow \parallel f(\vec{x}) \parallel_F \leqslant \varepsilon|\varphi(\vec{x})|$

Remarque 15

1. $f = \circ_{\vec{a}}(\varphi) \Leftrightarrow \parallel f \parallel_F = \circ_{\vec{a}}(|\varphi|)$ *dans* $\mathbb{R}$
2. *Si $\forall \vec{x} \in A$, $\varphi(\vec{x}) \neq 0$ on a $f = \circ_{\vec{a}}(\varphi) \iff \lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{a}\in A}} \dfrac{1}{\phi(\vec{x})} f(\vec{x}) = \vec{0}$.*
3. *$f = \circ_{\vec{a}}(1)$ est équivalent à $\lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{a}\in A}} f(\vec{x}) = \vec{0}$.*

4.2.3 Equivalence

Définition 49
Soit A une partie de E, $\vec{a} \in \bar{A}$ (éventuellement $E = \mathbb{R}$, $\vec{a} = \pm\infty$) et $(f, g) \in \mathscr{F}(A, F)^2$.
On dit f et g sont équivalentes en $\vec{a}$ et on note $f \underset{\vec{a}}{\sim} g$ ou $f(\vec{x}) \underset{\vec{a}}{\sim} g(\vec{x})$ si $f(\vec{x}) - g(\vec{x}) = o_{\vec{a}}(\| g(\vec{x}) \|_F)$

Propriétés 11

1. *Si $f \underset{\vec{a}}{\sim} g$ on a $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L} \Rightarrow \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x}) = \vec{L}$.*
2. *Si $\vec{L} \neq \vec{0}$ on a $f(\vec{x}) \underset{\vec{a}}{\sim} \vec{L} \Leftrightarrow \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$*
3. *$f(\vec{x}) \underset{\vec{a}}{\sim} g(\vec{x}) \Rightarrow N(f(\vec{x})) \sim N(g(\vec{x}))$*
4. *$f(\vec{x}) \underset{\vec{a}}{\sim} g(\vec{x}) \Rightarrow f(\vec{x}) = \bigcirc_{\vec{a}}(g(\vec{x}))$ et $g(\vec{x}) = \bigcirc_{\vec{a}}(f(\vec{x}))$.*
5. *Si $F = \mathbb{K}$, $\forall \vec{x} \in A$, $g(\vec{x}) \neq 0$ Alors $f \underset{\vec{a}}{\sim} g \Leftrightarrow \lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = 1$*

4.3 Continuité

Rappels

Définition 50
Soit A une partie non vide de E, $\vec{a} \in A$ dans E et f une application de A dans F.
On dit que f est continue en $\vec{a}$ si f admet une limite en $\vec{a}$

Définition 51
Soit A une partie non vide de E et f une application de A dans F, on dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A. On notera $\mathcal{C}(A, F)$ l'ensemble des applications continues sur A à valeurs dans F.

Proposition 47
Soit A une partie non vide de E, f une application de A dans F et $\vec{a} \in A$,
f est continue en $\vec{a}$ si et seulement si pour toute suite $(\vec{u}_n)_n$ de A, $\lim\limits_{n\to+\infty} \vec{u}_n = \vec{a} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(\vec{u}_n) = f(\vec{a})$.

On a aussi

Proposition 48
Soit A une partie non vide de E, f une application de A dans F et $\vec{a} \in A$,
f est continue en $\vec{a}$ si et seulement si pour toute suite $(\vec{u}_n)_n$ de A, $\lim\limits_{n\to+\infty} \vec{u}_n = \vec{a} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(\vec{u}_n)$ existe dans F.

Propriétés 12

P1 *$(\mathcal{C}(A, F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(A, F), +, .)$*

P2 *$(\mathcal{C}(A, \mathbb{K}), +, .)$ est une $\mathbb{K}$ algèbre, c'est une sous-algèbre de $(\mathscr{F}(A, \mathbb{K}), +, \times, .)$.*

P3 *Une composée d'applications linéaires continues est continue, plus précisément on a le théorème*

Théorème 9
Si f est une fonction continue sur une partie A de E à valeurs dans une partie B de F et g est une fonction continue sur B à valeurs dans G
Alors $g \circ f$ est une fonction continue sur A à valeurs dans G.

P4

Théorème 10
Si A une partie de E et $f \in \mathscr{F}(A, F)$ Alors
- *f est continue sur A si et seulement si Pour tout ouvert O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de A*
- *f est continue sur A si et seulement si Pour tout fermé Ω de F, $f^{-1}(\Omega)$ est un fermé de A*

P5

Théorème 11
Soit A une partie de E, $B \subset A$ telle que B est dense dans A, soit $A \subset \bar{B}$ et $(f,g) \in \mathcal{C}(A,F)^2$.
Si $\forall \vec{x} \in B,\ f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ Alors $f = g$ sur A.

P6

Proposition 49
Si $(F_k, \|\ \|_k)$, $k \in [\![1,d]\!]$ sont d espaces vectoriels normés, $F = F_1 \times \cdots \times F_d$ est l'espace vectoriel normé produit, $A \subset E$ et $f = (f_1, \ldots, f_d) \in \mathscr{F}(A,F)$ avec $\forall k \in [\![1,d]\!]$, $f_k \in \mathscr{F}(A,F_k)$, les f_k sont les fonctions composantes de f.
Alors f est continue sur A si et seulement si $\forall k \in [\![1,d]\!]$, f_k est continue sur A.

P7

Proposition 50
Si $f \in \mathscr{F}(A,F)$ où A est une partie de E
Alors f lipschitzienne sur $A \Rightarrow f$ est continue sur A, soit
$Lips(A,F) \subset \mathcal{C}(A,F)$

Définition 52 (homéomorphisme)
Soit $A \subset E$, $B \subset F$ et $f \in \mathscr{F}(A,B)$
On dit que f est un homéomorphisme de A sur B si

1. *f est une bijection de A sur B*
2. *f est continue sur A*
3. *f^{-1} est continue sur B*

On dit aussi que f est bicontinue.
S'il existe un homéomorphisme de A sur B on dit que les parties A et B sont homéomorphes.

Pour les fonctions réelles on a

Théorème 12
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $J = f(I)$ et f est continue sur I,
alors

1. *J est un intervalle de $\mathbb{R}$*
2. *f est un homéomorphisme de I sur J si et seulement si f est strictement monotone sur I*
   on a alors f^{-1} est une bijection continue de J sur I de même monotonie que f

Définition 53
Soit $f \in \mathscr{F}(A,F)$ avec $A \subset E$, on dit que f est uniformément continue sur A si
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta < 0,\ \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in A^2\ \ \| \vec{x} - \vec{y} \|_E \leqslant \eta \Rightarrow \| f(\vec{x}) - f(\vec{y}) \|_F \leqslant \varepsilon$

Proposition 51
Si $f \in \mathscr{F}(A,F)$ avec $A \subset E$ est uniformément continue sur A Alors f est continue sur A

Proposition 52
Si $f \in \mathscr{F}(A,F)$ avec $A \subset E$ est lipschitzienne sur A Alors f est uniformément continue sur A.

5 applications linéaires continues

Soit (E, N_E) et (F, N_F) deux espaces vectoriels normés et $\mathcal{L}_c(E,F)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues sur E à valeurs dans F.

Théorème 13
Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$
Alors les propositions suivantes sont équivalentes deux à deux

1. *f est continue sur E*
2. *f est continue en $\vec{0}_E$*
3. *$\exists r > 0$ tel que f est bornée sur $BF(\vec{0}_E, r)$*
4. *$\exists k > 0,\ \forall \vec{x} \in E,\ N_F(f(\vec{x})) \leqslant k N_E(\vec{x})$*
5. *f est lipschitzienne sur E.*

Proposition 53
Deux normes N_1 et N_2 sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel sont équivalentes si et seulement si l'application identité Id : $(E, N_1) \to (E, N_2)$ *est bicontinue.*

Proposition 54
Deux normes N_1 et N_2 sur un $\mathbb{K}$ espace vectoriel sont équivalentes si et seulement si les espaces vectoriels normés (E, N_1) et (E, N_2) ont les mêmes ouverts.

Proposition 55
Si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ alors $\sup\limits_{N_E(\vec{x}) \leqslant 1} N_F(f(\vec{x})) \in \mathbb{R}_+$

Définition 54
Pour $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on note $\| f \| = \sup\limits_{N_E(\vec{x}) \leqslant 1} N_F(f(\vec{x}))$

Proposition 56
$\| \ \|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$, $\| \ \|$ s'appelle la norme de $L_c(E, F)$ subordonnée à N_E et à N_F
$(L_c(E, F), \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé.

Proposition 57
Pour $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on a $\| f \| = \sup\limits_{\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}_E\}} \dfrac{N_F(f(\vec{x}))}{N_E(\vec{x})} = \sup\limits_{N_E(\vec{x}) = 1} N_F(f(\vec{x}))$

Proposition 58
Si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$ alors $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et pour les normes subordonnées aux normes respectives de E, F, G on a $\| v \circ u \| \leqslant \| v \| \| u \|$

Définition 55 (algèbre normée)
Soit $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ une $\mathbb{K}$ algèbre munie d'une norme N_A

1. *N_A est une norme d'algèbre si $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{A}^2$ on a $N_A(\vec{x} \times \vec{y}) \leqslant N_A(\vec{x}).N_A(\vec{y})$*
2. *N_A est une norme d'algèbre unitaire si N_A est une norme d'algèbre telle que $N_A(1_{\mathcal{A}}) = 1$*

On appelle algèbre normée une algèbre munie d'une norme d'algèbre.

Proposition 59
Soit (E, N_E) un espace vectoriel normé et $\| \ \|$ la norme de l'algèbre $\mathcal{L}_c(E)$ subordonnée à N_E.
$\| \ \|$ est une norme d'algèbre unitaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 60
Soit A un ensemble non vide et $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ l'algèbre des applications bornées de A dans $\mathbb{K}$ on muni $\mathcal{B}(A, \mathbb{K})$ de la norme N_∞, $\forall f \in \mathcal{B}(A, F)$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{t \in A} |f(t)|$
N_∞ est une norme d'algèbre unitaire.

Continuité des applications bilinéaires :

Théorème 14
Si B est une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, $E \times F$ muni de la topologie produit
Alors B est continue sur $E \times F$ si et seulement si $\exists k \geqslant 0$, $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E \times F$, $\| B(\vec{x}, \vec{y}) \|_G \leqslant k \| \vec{x} \|_E \| \vec{y} \|_F$

Applications :

Proposition 61

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, \vec{x}) & \mapsto & \lambda.\vec{x} \end{array}$ *est une application bilinéaire continue.*
2. *Si $(E, <\,,\,>)$ est un espace préhilbertien,* $\begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{K} \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & < \vec{x}, \vec{y} > \end{array}$ *est une application bilinéaire continue.*
3. $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_c(E) \times \mathcal{L}_c(E) & \to & \mathcal{L}_c(E) \\ (u, v) & \mapsto & u \circ v \end{array}$ *est une application bilinéaire continue.*
4. *Si $(\mathcal{A}, +, \times, ., \| \ \|_{\mathcal{A}})$ est une algèbre normée alors* $\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ (u, v) & \mapsto & u \times v \end{array}$ *est une application bilinéaire continue.*

Les espaces produits étant munis de la topologie produit.

6 Compacité

Soit $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ des espaces vectoriels normés.

Définition 56
Soit A une partie de E
A est une partie compacte de $(E, \| \ \|_E)$ si toute suite de A possède au moins une valeur d'adhérence dans A, c'est à dire de toute suite de A on peut extraire une suite convergeant dans A.

Proposition 62
Deux normes équivalentes sur un espace vectoriel définissent les mêmes parties compactes.

Proposition 63
Dans un espace vectoriel normé, si K est une partie compacte alors K est fermée et bornée.

Attention ! la réciproque est fausse dans un espace vectoriel normé quelconque.
Par exemple dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, la boule unité fermée est une partie fermée et bornée mais ce n'est pas une partie compacte.

En dimension finie la réciproque est vraie, on a les deux théorèmes suivants :

Théorème 15 (Bolzano Weierstrass)
Dans un espace vectoriel de dimension finie de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente.

Théorème 16
Dans un espace vectoriel de dimension finie les compacts sont les parties fermées et bornées.

Proposition 64
Une partie compacte de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.

Proposition 65
Si K est un compact de E et A est une partie de K
Alors A est une partie compacte de E si et seulement si A est une partie fermée de E.

Théorème 17
Si A est un compact de E, B est un compact de F Alors $A \times B$ est une partie compacte de l'espace vectoriel normé produit $E \times F$.

Théorème 18
L'image d'un compact par une application continue est un compact, c'est à dire :
Si A est une partie compacte de E et f une application continue sur A à valeurs dans F, $f \in \mathcal{C}(A, F)$
Alors $f(A)$ est une partie compacte de F

Conséquence :

Proposition 66
Si $f \in \mathcal{C}(A, F)$ où A est un compact de E
Alors l'application $f : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R} \\ \vec{x} & \mapsto & \| f(\vec{x}) \|_F \end{array}$ admet un maximum et un minimum sur A,
c'est à dire $\exists (\vec{a}_0, \vec{a}_1) \in A^2$ tel que $\| f(\vec{a}_0) \|_F = \max\limits_{\vec{x} \in A} \| f(\vec{x}) \|_F$ et $\| f(\vec{a}_1) \|_F = \min\limits_{\vec{x} \in A} \| f(\vec{x}) \|_F$

Compacts et applications uniformément continues

Théorème 19
Soit A une partie de E et $f \in \mathcal{C}(A, F)$
Si A est un compact Alors f est uniformément continue sur A