

Espaces vectoriels et applications linéaires en dimension finie

premières notions

Ce document n'est pas un cours mais présente seulement quelques notions à connaître sur le sujet.
Soit $(E, +, \cdot)$ un \mathbf{K} espace vectoriel où \mathbf{K} désigne un corps de caractéristique nulle.

1 Systèmes générateurs

1.1 Définition

Définition 1

On dit que la famille $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ de p vecteurs de E est génératrice dans E si et seulement si $\forall \vec{u} \in E, \exists (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p / \vec{u} = \sum_{k=1}^p x_k \vec{u}_k$. On dit aussi que S est un système générateur de E

1.2 Propriétés

- **P₁** : $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de E ssi $E = \text{vect} \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \rangle$.
- **P₂** : $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de E ssi $\forall \vec{u} \in E$ le système
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u} \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbf{K}^p \end{cases}$$
 possède au moins une solution.
- **P₃** : $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille génératrice de E ssi
$$\begin{matrix} \mathbf{K}^p & \rightarrow & E \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_p) & \mapsto & \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p \end{matrix}$$
 est surjective.
- **P₄** : Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille génératrice de E est une famille génératrice de E .
Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ est une famille génératrice de E et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille de E telle que $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\} \subset \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ alors $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille génératrice de E .

2 Systèmes libres

2.1 Définition

Définition 2 On dit que la famille $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ de p vecteurs de E est libre dans E si et seulement si

$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p, \sum_{k=1}^p x_k \vec{u}_k = \vec{0} \implies x_1 = \dots = x_p = 0$. On dit aussi que S est un système libre de E .

Une famille de vecteurs qui n'est pas libre est dite liée.

2.2 Propriétés

- **P₁** : $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est libre si et seulement si $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbf{K}^p, \forall (\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbf{K}^p,$
$$\sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{u}_k = \sum_{k=1}^p \beta_k \vec{u}_k \implies \forall k \in \{1, \dots, p\}, \alpha_k = \beta_k$$
- **P₂** : $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est libre si et seulement si $\forall \vec{u} \in E$ le système
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^p \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u} \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbf{K}^p \end{cases}$$
 admet au plus une solution.
- **P₃** : $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est libre si et seulement si
$$\begin{matrix} \mathbf{K}^p & \rightarrow & E \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_p) & \mapsto & \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p \end{matrix}$$
 est injective.
- **P₄** : Soit $\vec{u}_1 \in E, S = (\vec{u}_1)$ est libre si et seulement si $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$. ($\vec{0}$) est lié.
- **P₅** : $S = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est liée si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbf{K}, \vec{u}_1 = \lambda \cdot \vec{u}_2$ ou $\vec{u}_2 = \lambda \cdot \vec{u}_1$

- **P₆** : $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est liée si et seulement si il existe au moins un vecteur de S combinaison linéaire des autres vecteurs de S
- **P₇** : Soit $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ une famille libre et $\vec{u} \in E$.
 $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p, \vec{u})$ est libre si et seulement si $\vec{u} \notin \text{vect} \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \rangle$.
- **P₈** : Toute famille de vecteurs extraite d'une famille libre est libre
- **P₉** : Toute famille de vecteurs contenant une famille liée est liée.
- **P₁₀** : Toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.

3 Bases

3.1 Définition

Définition 3 On dit que la famille $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ de p vecteurs de E est une base de E si et seulement si S est libre et génératrice dans E .

Exemple 1 $(\vec{e}_k)_{1 \leq k \leq n}$ où $\vec{e}_k = (\delta_{i,k})_{1 \leq i \leq n}$ avec $\delta_{i,k} = 0$ pour $i \neq k$ et $\delta_{k,k} = 1$, est une base de \mathbf{K}^n , on l'appelle la base canonique de \mathbf{K}^n .

Théorème 1 Soit $B = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de n vecteurs de E .

B est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.

$\forall \vec{u} \in E, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n / \vec{u} = x_1 \cdot \vec{u}_1 + \dots + x_n \cdot \vec{u}_n, (x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées du vecteur \vec{u} dans la base B .

3.2 Propriétés

- **P₁** : $S := (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E si et seulement si $\forall \vec{u} \in E$ le système
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u} \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n \end{cases}$$
 admet exactement une solution.
- **P₂** : $S := (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E si et seulement si
$$\begin{matrix} \mathbf{K}^n & \rightarrow & E \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) & \mapsto & \alpha_1 \vec{u}_1 + \dots + \alpha_n \vec{u}_n \end{matrix}$$
 est un isomorphisme d'espace vectoriel.
- **P₃** : Si $B := (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E alors toute famille extraite de B est libre et toute famille de vecteurs contenant les vecteurs de B est génératrice.

4 Espaces vectoriels de dimension finie

4.1 Dimension finie

Définition 4 On dit qu'un espace vectoriel E est de dimension finie sur K si et seulement si E admet une famille génératrice finie.

E est de dimension finie si et seulement si $\exists (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) \in E^p$ tel que $E = \text{vect} \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \rangle$

Exemple 2 $(\mathbf{K}^n, +, \cdot)$ est de dimension finie.

Théorème 2 Tout espace vectoriel $E \neq \{\vec{0}\}$ et de dimension finie admet au moins une base.

par convention : $\{\vec{0}\}$ est de dimension finie et admet pour base \emptyset

Théorème 3 (théorème de la dimension) Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases possèdent le même nombre d'éléments. Ce nombre est la dimension de E .

Par convention $\{\vec{0}\}$ a pour dimension 0. On appelle droite vectorielle tout espace vectoriel de dimension 1 et plan vectoriel tout espace vectoriel de dimension 2.

Théorème 4 E est de dimension n si et seulement si il existe un isomorphisme de \mathbf{K}^n sur E .

Proposition 1

Si $(E_1, +, \cdot)$ et $(E_2, +, \cdot)$ sont deux \mathbf{K} espaces vectoriels de dimension finie

Alors $E_1 \times E_2$ est de dimension finie et $\dim E_1 \times E_2 = \dim E_1 + \dim E_2$

4.2 Familles libres et génératrices en dimension n

Théorème 5 Si $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est un système générateur de E alors S contient une base de E .

Conséquence : $p \geq n$ où $n = \dim E$ et si $p = n$ alors S est une base de E

Théorème 6 (théorème de la base incomplète) Si $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est un système libre de E alors il existe une base de E qui contient S .

Conséquence : $p \leq n$ où $n = \dim E$ et si $p = n$ alors S est une base de E

Théorème 7 Si $S = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est une famille de p vecteurs de E on a l'équivalence entre les trois propriétés suivantes :

1. S est une base de E
2. S est générateur de E et $p = n$
3. S est libre dans E et $p = n$

4.3 Sous espaces vectoriels

Proposition 2 Soit F un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E . On a :

1. F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$
2. $E=F$ si et seulement si $\dim E = \dim F$

5 Sous-espaces supplémentaires

Théorème 8

Hypothèses

- Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$
- Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E
- Soit $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E_1
- Soit $\mathcal{B}_2 = (\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_{p+r})$ une base de E_2
- On note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \dots, \vec{e}_{p+r})$.

Conclusions

- $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$ si et seulement si \mathcal{B} est libre dans E .
- $E = E_1 + E_2$ si et seulement si \mathcal{B} est un système générateur de E .
- $E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si \mathcal{B} est une base de E .

Théorème 9 Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. F et G sont supplémentaires si et seulement si

1. $F \cap G = \{\vec{0}\}$
2. $\dim E = \dim F + \dim G$

Théorème 10 Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. F et G sont supplémentaires si et seulement si

1. $E = F + G$
2. $\dim E = \dim F + \dim G$

Théorème 11

Si E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E alors F admet au moins un supplémentaire dans E .

Remarque 1 Si $\dim E \geq 2$ et $0 < \dim F < \dim E$ Alors F possède une infinité de supplémentaires.

Définition 5 Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E , on appelle **codimension** de F la dimension d'un supplémentaire de F , on la note $\text{codim}F$ et on a :
 $\text{codim}F = \dim E - \dim F$.

Théorème 12 Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, on a :
 $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$

Théorème 13 Soit F et G deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie E .
 $F \cap G = \{\vec{0}\}$ si et seulement si $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$

6 Applications linéaires

6.1 Combinaisons linéaires

Proposition 3 Soit E et F deux \mathbf{K} espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ p vecteurs de E , on a : l'image d'une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ est une combinaison linéaire des vecteurs $f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p)$. Plus précisément : $\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p, f(x_1\vec{u}_1 + \dots + x_p\vec{u}_p) = x_1f(\vec{u}_1) + \dots + x_pf(\vec{u}_p)$.

Proposition 4 Soit E et F deux \mathbf{K} espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on suppose que $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est un système générateur de E , on a :

$$\text{Im}f = \text{Vect} \langle f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p) \rangle$$

Théorème 14

Si

- E est un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$
- F est un \mathbf{K} espace vectoriel
- $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E
- $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est un système de n vecteurs de F

Alors

- Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(\vec{e}_k) = \vec{u}_k$
de plus :
 1. f est un isomorphisme, $f \in \mathcal{GL}(E, F)$ si et seulement si \mathcal{S} est une base de F
 2. f est injective si et seulement si \mathcal{S} est un système libre de F
 3. f est surjective si et seulement si \mathcal{S} est un système générateur de F

Théorème 15 Soit E et F deux \mathbf{K} espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

- Si f est un isomorphisme Alors $\dim E = \dim F$
- Si f est injective Alors $\dim E \leq \dim F$
- Si f est surjective Alors $\dim E \geq \dim F$

Ces deux théorèmes s'appliquent en particulier pour $E = \mathbf{K}^n$ rapporté à sa base canonique. On a alors :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \rightarrow & F \\ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & f(\vec{x}) = x_1\vec{u}_1 + \dots + x_n\vec{u}_n \end{array}$$

Théorème 16

Si E et F sont deux \mathbf{K} espaces vectoriels de dimension finie avec $\dim E = \dim F$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective
2. f est surjective
3. f est bijective

en particulier pour $E = F$ soit :

Théorème 17

Si E est un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$

Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective
2. f est surjective
3. f est bijective

6.2 Rang

6.2.1 Rang d'un système de vecteurs

Définition 6 Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel et $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ un système de p vecteurs de E . On appelle rang du système de vecteur \mathcal{S} la dimension de $\text{Vect} \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \rangle$, on note :

$$\text{rg}(\mathcal{S}) = \dim \text{Vect} \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \rangle \text{ ou } \text{rang}(\mathcal{S}) = \dim \text{Vect} \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p \rangle$$

Proposition 5 Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel et $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ un système de p vecteurs de E . Le rang du système \mathcal{S} est le nombre maximal de vecteurs extraits de \mathcal{S} qui forme un système libre.

Proposition 6 Soit E et F deux \mathbf{K} espace vectoriel, on suppose qu'il existe un isomorphisme f d'espace vectoriel de E sur F , $f \in \mathcal{GL}(E, F)$, \mathcal{S} est un système de p vecteurs de E
On a $\text{rang } f(\mathcal{S}) = \text{rang } \mathcal{S}$

6.2.2 Rang d'une application linéaire

Définition 7 Soit E et F deux \mathbf{K} espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle rang de f la dimension de $\text{Im } f$, on note $\text{rg } f = \dim \text{Im } f$ ou $\text{rang } f = \dim \text{Im } f$

Remarque 2 Pour définir le rang d'une application linéaire il suffit que E soit de dimension finie.

Proposition 7 Soit E et F deux \mathbf{K} espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E , on a : $\text{rg } f = \text{rg}(f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$

Remarque 3 Si $\mathcal{G} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p)$ est un système générateur de E , on a aussi $\text{rg } f = \text{rg}(f(\vec{u}_1), \dots, f(\vec{u}_p))$

Proposition 8 Soit E et F deux \mathbf{K} espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
 f est surjective si et seulement si $\text{rg } f = \dim F$

Proposition 9 Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$.
 f est un automorphisme si et seulement si $\text{rg } f = \dim E$

Proposition 10 Soit E, F et G trois \mathbf{K} espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ on a :

- Si g est un isomorphisme d'espace vectoriel, $g \in \mathcal{GL}(F, G)$ Alors $\text{rg } g \circ f = \text{rg } f$
- Si f est un isomorphisme d'espace vectoriel, $f \in \mathcal{GL}(E, F)$ Alors $\text{rg } g \circ f = \text{rg } g$

6.3 Théorème du rang

Théorème 18

Si

- E et F sont deux \mathbf{K} espaces vectoriels avec E de dimension finie
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$
- E_1 est un supplémentaire de $\ker f$, $E = \ker f \oplus E_1$

Alors

$$E_1 \rightarrow \text{Im } f$$

$f : \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = f(\vec{x})$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Théorème 19 (théorème du rang)

Si

- E et F sont deux \mathbf{K} espaces vectoriels de dimension finie
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$

Alors

- $\dim E = \dim \text{Im } f + \dim \ker f$

6.3.1 Formes linéaires

Définition 8 Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans \mathbf{K} , on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$

Proposition 11 Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E , l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \rightarrow & E^* \\ & & E \rightarrow \mathbf{K} \\ (a_1, \dots, a_n) & \mapsto & \varphi : \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n \mapsto a_1x_1 + \dots + a_nx_n \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Conséquence :

Proposition 12

Si E est un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie n Alors E^* est de dimension finie et $\dim E^* = \dim E$.

Proposition 13

Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E , on note pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, φ_k la forme linéaire définie par $\forall \vec{u} \in E$, $\vec{u} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$, $\varphi_k(\vec{u}) = x_k$, φ_k est la k -ième forme linéaire coordonnée relativement à la base \mathcal{B} . On a :
 $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^* .

7 Espace vectoriel produit

7.1 Définition

Proposition 14

Soit $(E_1, +, \cdot)$ et $(E_2, +, \cdot)$ deux \mathbf{K} espaces vectoriels, on considère $E = E_1 \times E_2$ muni des deux lois :

- $\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$, $\forall (\vec{y}_1, \vec{y}_2) \in E_1 \times E_2$ on pose $(\vec{x}_1, \vec{x}_2) + (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$
- $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2$ on pose $\lambda \cdot (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)$

$(E_1 \times E_2, +, \cdot)$ est un \mathbf{K} espace vectoriel appelé espace vectoriel produit.

Remarque 4 Si E_1, \dots, E_p sont p \mathbf{K} espaces vectoriels on définit aussi l'espace vectoriel produit : $E_1 \times \dots \times E_p$ avec les deux lois :

$\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$, $\forall (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$

$(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) + (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1, \dots, \vec{u}_p + \vec{v}_p)$

$\lambda(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p) = (\lambda \vec{u}_1, \dots, \lambda \vec{u}_p)$

7.2 Dimension finie

Proposition 15

Si $(E_1, +, \cdot)$ et $(E_2, +, \cdot)$ sont deux \mathbf{K} espaces vectoriels de dimension finie

Alors $(E_1 \times E_2, +, \cdot)$ est un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie et $\dim E_1 \times E_2 = \dim E_1 + \dim E_2$.

Remarque 5

Si E_1, \dots, E_p sont p \mathbf{K} espaces vectoriels de dimension finie Alors $E_1 \times \dots \times E_p$ est un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie et $\dim E_1 \times \dots \times E_p = \dim E_1 + \dots + \dim E_p$

8 Matrices d'une application linéaire

8.1 Matrice des coordonnées d'un vecteur

Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .

Définition 9 Pour $\vec{u} \in E$, $\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$ avec $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$, on appelle vecteur colonne des coordonnées de \vec{u} dans la base \mathcal{B} le tableau à n lignes et une colonne : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, et on écrit : $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} .

On note $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K})$ l'ensemble des tableaux à n lignes et une colonne d'éléments de \mathbf{K} .

Un élément de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbf{K})$ est une matrice à n lignes et une colonne à coefficients dans \mathbf{K} .

8.2 Matrice d'une forme linéaire

Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .

Définition 10 Soit $\varphi \in E^*$ on appelle matrice de φ dans la base \mathcal{B} le tableau à une ligne et n colonnes

$$A = (\varphi(\vec{e}_1), \dots, \varphi(\vec{e}_n))$$

et on note $\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K})$ l'ensemble des tableaux d'éléments de \mathbf{K} à 1 ligne et n colonnes. Un élément de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K})$ est une matrice à coefficients dans \mathbf{K} à 1 ligne et n colonnes.

Un élément de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K})$ peut s'identifier à un élément de \mathbf{K}^n .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K}), +, \cdot)$ est un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension n

Proposition 16 *L'application :*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1n}(\mathbf{K}) &\rightarrow E^* \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto \varphi \text{ avec } \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n, \varphi(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel

8.3 Matrice d'une application linéaire

Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .

Soit F un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie $m \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ une base de F .

On note $\mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K})$ l'ensemble des tableaux d'éléments de \mathbf{K} à m lignes et n colonnes. On dit qu'un élément de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K})$ est une matrice à m lignes, n colonnes à coefficients dans \mathbf{K} .

Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\vec{x} \in E$, $f(\vec{x}) = f_1(\vec{x})\vec{u}_1 + \dots + f_m(\vec{x})\vec{u}_m$, avec $\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m1}(\mathbf{K})$ le vecteur colonne

des coordonnées de $f(\vec{x})$ dans la base \mathcal{B}_2 . $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $f_i \in E^*$, (f_1, \dots, f_m) sont les formes linéaires composantes de l'application linéaire f .

Proposition 17

$$\mathcal{L}(E, F) \rightarrow (E^*)^m$$

- *L'application :* $f \mapsto (f_1, \dots, f_m)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.
- $\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Définition 11 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle matrice de f dans les bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 la matrice $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K})$ avec $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}\vec{u}_i$

On note pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, C_j la $j^{\text{ième}}$ colonne de la matrice M et pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, L_i la $i^{\text{ième}}$ ligne de la matrice M .

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad L_i = (a_{i1}, \dots, a_{in}) \text{ on notera aussi } M = (C_1, \dots, C_n) \text{ ou } M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$$

Remarque 6

- Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, C_j est le vecteur colonne des coordonnées de $f(\vec{e}_j)$ dans la base \mathcal{B}_2 de F
- Pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, L_i est la matrice de la forme linéaire composante f_i dans la base \mathcal{B}_1 de E

8.4 Ensemble des matrices

Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $\mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans \mathbf{K} .

Opérations sur les matrices

Somme

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K})^2, A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad A + B = C \text{ avec } C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}, c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Multiplication externe

$$\forall (\lambda, A) \in \mathbf{K} \times \mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K}), \quad \lambda \cdot A = C \text{ avec } \forall (i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

Produit de matrices

Si $A \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbf{K})$ on définit le produit $A \times B = P$ par $P = (p_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq r}}$ avec

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket, p_{ij} = \sum_{k=1}^q a_{ik}b_{kj}$$

Remarque 7 Si $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix}$ et $B = (C_1, \dots, C_r)$ alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$, $p_{ij} = L_i C_j$

Proposition 18

$(\mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K}), +, \cdot)$ est un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension mn

Si pour $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ on note $E_{ij} = (e_{kl})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq l \leq n}}$ la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K})$ définie par $e_{kl} = 0$ si $(k, l) \neq (i, j)$ et $e_{ij} = 1$, $(E_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base, appelée la base canonique de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbf{K})$.

Proposition 19

Soit E, F, G trois \mathbf{K} espaces vectoriels de dimension finie, $\dim E = p, \dim F = q, \dim G = r$, E rapporté à une base \mathcal{B}_1 , F à une base \mathcal{B}_2 et G à une base \mathcal{B}_3 . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de matrice A dans les bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ dans les bases \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_3 .

On a :

$g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ et $g \circ f$ a pour matrice $B \times A$ dans les bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_3 .

Proposition 20

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}), +, \times, \cdot)$ est une \mathbf{K} algèbre (non commutative pour $n \geq 2$)

8.5 Trace d'une application linéaire

Définition 12 (Trace d'une matrice)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ on définit la trace de A

par $\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

Proposition 21 tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\text{tr} \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^*$

Proposition 22 $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

Proposition 23 Deux matrices semblables ont même trace

conséquence :

On peut définir la trace d'un endomorphisme

Définition 13

Soit E un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle trace de f la trace d'une matrice de f dans une base de E

D'après la proposition précédente cette définition ne dépend pas de la base de E choisie.

Proposition 24 La trace d'un projecteur est égale à son rang.

C'est à dire que si E est un \mathbf{K} espace vectoriel de dimension finie et $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur alors $\text{tr}(p) = \text{rang} p$

9 Documents connexes

- espaces vectoriels premières notions
- espaces vectoriels