Espaces vectoriels

Ce document n'est pas un cours mais présente seulement quelques notions à connaître sur le sujet.

1 Quelques structures

1.1 Groupes

Définition 1 *Soit G un ensemble non-vide muni d'une loi interne $\star$*
(c'est à dire d'une application $\star : \begin{array}{ccc} G\times G & \to & G \\ (x,y) & \mapsto & x\star y \end{array}$*),*
$(G,\star)$ est un groupe si la loi $\star$ vérifie :
- $\forall (x,y,z)\in G\times G\times G,\ x\star(y\star z)=(x\star y)\star z$ *(on dit $\star$ est associative)*
- $\exists e\in G,\ \forall x\in G,\ x\star e=e\star x=x$ *(on dit que e est élément neutre pour $\star$)*
- $\forall x\in G,\ \exists x^{'}\in G,\ x\star x^{'}=x^{'}\star x=e$ *(on dit que tout élément de G possède un symétrique).*

Si de plus $\forall (x,y)\in G^2,\ x\star y=y\star x$ (on dit que $\star$ est commutative), on dit que le groupe $(G,\star)$ est commutatif ou abélien.

Remarque 1 *On montre que l'élément neutre est unique, de même que l'inverse d'un élément.*

Notations :
- La loi d'un groupe abélien est souvent notée additivement $+$:
  - l'élément neutre est noté 0 ou 0_G
  - le symétrique d'un élément x est noté $-x$ et est appelé l'opposé de x
  - La puissance d'ordre $n\in\mathbb{N}$ d'un élément x, $x+\cdots+x$ (n termes) est notée $n\cdot x$ (avec $0\cdot x=0$).
- Lorsque la loi d'un groupe est notée multiplicativement$\cdot$ ou $\times$:
  - l'élément neutre est noté 1 ou 1_G
  - le symétrique d'un élément x est noté x^{-1}.
  - La puissance d'ordre $n\in\mathbb{N}$ d'un élément x, $x\times\cdots\times x$ (n termes) est notée x^n (convention $x^0=1$).

Définition 2 *Soit $(G,\star)$ un groupe et G' une partie de G*
G' est un sous-groupe de $(G,\star)$ si

1. *G' est non vide*
2. *$(G',\star)$ est un groupe*

Proposition 1 *soit $(G,\star)$ un groupe et G' une partie non vide de G*
G' est un sous-groupe de $(G,\star)$ si et seulement si $\forall (x,y)\in {G'}^2,\quad x\star y^{-1}\in G'$.

Définition 3 *Soit $(G,\star)$ et $(G^{'},\star')$ deux groupes,*
on appelle morphisme de groupe toute application f de G dans G' telle que $\forall (x,y)\in G^2,\ f(x\star y)=f(x)\star' f(y)$

On a aussi :
- Un morphisme de groupe bijectif s'appelle un isomorphisme de groupe.
- Pour $G'=G$ un morphisme de groupe s'appelle un endomorphisme de groupe.
- Pour $G'=G$ un isomorphisme de groupe s'appelle un automorphisme de groupe.
  Proposition 2
  Si $Aut(G)$ désigne l'ensemble des automorphismes du groupe $(G,\star)$ Alors $(Aut(G),\circ)$ est un groupe
  Proposition 3 *Pour $a\in G$ l'application* $h_a : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ g & \mapsto & h_a(g)=a\star g\star a^{-1} \end{array}$ *est un automorphisme de $(G,\star)$ appelé automorphisme intérieur.*

Définition 4 *Soit $(G,\star)$ et $(G^{'},\star')$ deux groupes et f un endomorphisme de groupe*
- *On appelle noyau de f la partie de G,* $\ker f=\{g\in G,\ f(g)=e_{G'}\}$ *où $e_{G'}$ est l'élément neutre de G'*
- *On appelle image de f la partie de G',* $\mathrm{Im} f=\{g'\in G',\ \exists g\in G,\ f(g)=g'\}$.

Proposition 4 *Soit $(G,\star)$ et $(G^{'},\star')$ deux groupes et f un morphisme de groupe.*
Le noyau de f est un sous-groupe de $(G,\star)$ et l'image de f est un sous-groupe de $(G',\star')$

1.2 Anneaux

Définition 5 *Soit A un ensemble non vide muni de deux loi internes $+$ et $\times$.*
$(A,+,\times)$ est un anneau si

1. *$(A,+)$ est un groupe abélien*
2. *la loi $\times$ vérifie :*
   (a) *$\times$ est associative*
   (b) *$\times$ possède un élément neutre*
   (c) *la multiplication $\times$ est distributive sur l'addition à droite et à gauche :*
   $\forall (x,y,z)\in A^3,\ x\times(y+z)=x\times y+x\times z$ *et* $(x+y)\times z = x\times z + y\times z$

- *Si $\times$ est commutative on dit que l'anneau est commutatif.*
- *Si $\times$ est commutative et n'a pas de diviseur de 0, c'est à dire que $\forall (x,y)\in A^2,\ x\times y=0 \Rightarrow x=0$ ou $y=0$ on dit que l'anneau est intègre.*

L'élément neutre de $(A,+)$ se note en général 0 ou 0_A et l'élément neutre de la multiplication se note 1 ou 1_A
Comme pour les groupes on définit les sous-anneaux et les morphismes d'anneaux

Définition 6 *Si $(A,+,\times)$ est un anneau et A' est une partie non-vide de A, A' est un sous-anneau de $(A,+,\times)$ si $(A',+,\times)$ est un anneau et $1_A\in A'$*

Proposition 5 *Si $(A,+,\times)$ est un anneau et A' est une partie non-vide de A*
A' est un sous-anneau de $(A,+,\times)$ si et seulement si

1. *$(A',+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$*
2. *$\forall (x,y)\in {A'}^2,\ x\times y\in A'$*
3. *$1_A\in A'$*

Pour un anneau commutatif on définit la notion d'idéal

Définition 7 *Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif et $J\subset A$, J est un idéal de A si*

- *$(J,+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$*
- *$\forall (a,b)\in A\times J,\ a\times b\in J$*

Remarque 2 *Si J est un idéal d'un anneau commutatif $(A,+,\times)$ et $1_A\in J$ alors $J=A$*

Proposition 6 *Les idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$ sont les parties $n\mathbb{Z}=\{n\times m,\ m\in\mathbb{Z}\}$ de $\mathbb{Z}$ pour $n\in\mathbb{N}$.*

Définition 8 *Soit $(A,+,\times)$ et $(A',+,\times)$ deux anneaux, un morphisme d'anneau est une application f de A dans A' telle que :*

1. *$\forall (a,b)\in A^2,\ f(a+b)=f(a)+f(b)$*
2. *$\forall (a,b)\in A^2,\ f(a\times b)=f(a)\times f(b)$*
3. *$f(1_A)=1_{A'}$*

Proposition 7 *Si f est un morphisme d'un anneau A sur un anneau A' alors*

- *Le noyau de f, $\ker f=f^{-1}(\{0_{A'}\})$ est un idéal de A*
- *L'image de A par f, $\mathrm{Im} f=f(A)$ est un sous anneau de $(A',+,\times)$*

Proposition 8 *Soit $(A,+,\times)$ un anneau, l'application :* $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & A \\ n & \mapsto & n.1_A \end{array}$
est un homorphisme d'anneau de noyau $n_0\mathbb{Z}$ où $n_0\in\mathbb{N}$

Définition 9 (caractéristique d'un anneau) *Pour un anneau $(A,+,\times)$*
l'unique entier n_0 de la proposition précédente s'appelle la caractéristique de l'anneau A

Notation

Pour un anneau $(A,+,\times)$ on note A^* l'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication,
$A^*=\{a\in A,\ \exists a'\in A,\ a\times a'=a'\times a=1_A\}$

Par exemple : $\mathbb{Z}^*=\{-1,1\}$, $\mathbb{K}^*=\mathbb{K}\setminus\{0\}$, $\mathbb{K}[X]^*=\mathbb{K}^*$

Proposition 9 *Pour un anneau $(A,+,\times)$, $(A^*,\times)$ est un groupe.*

1.3 Corps

Définition 10 *Soit* $\mathbf{K}$ *un ensemble muni de deux lois de compositions internes* $+$ *et* $\times$
$(\mathbf{K},+,\times)$ *est un corps si*

1. $(\mathbf{K},+,\times)$ *est un anneau*
2. *les éléments de* $\mathbf{K}\setminus\{0\}$ *possède un inverse pour la multiplication, c'est à dire que* $\mathbf{K}^*=\mathbf{K}\setminus\{0\}$

Si la multiplication $\times$ *est commutative on dit que le corps est commutatif*

Un corps est un anneau intègre.
On définit la caractéristique d'un corps $(\mathbf{K},+,\times)$ comme étant la caractéristique de l'anneau $(\mathbf{K},+,\times)$.

Exemples :$(\mathbb{Q},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{C},+,\times)$ sont des corps.
Dans la suite sauf mention du contraire le mot corps désignera un corps commutatif de caractéristique nulle.

1.4 Espaces vectoriels

Voir les documents :

- Espaces vectoriels premières notions
- Espaces vectoriels de dimension finie premières notions

Exemple 1

- $(\mathbf{K}^n,+,\cdot)$ *est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel de dimension* n
- *Soit* A *et* I *deux ensembles non vides, on notera* A^I *l'ensemble des applications de* I *dans* A, *une application de* A^I *s'appellera aussi une famille d'éléments de* A *indexée par* I *et l'application* $x:\begin{array}{ccc} I & \to & A \\ i & \mapsto & x(i)\end{array}$ *se notera aussi* $(x_i)_{i\in I}$
Si E *est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel alors* $(E^I,+,\cdot)$ *est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel avec*
– $(x_i)_{i\in I}+(y_i)_{i\in I}=(z_i)_{i\in I}$ *où* $\forall i\in I,\ z_i=x_i+y_i$
– $\lambda\cdot(x_i)_{i\in I}=(z_i)_{i\in I}$ *où* $\forall i\in I,\ z_i=\lambda\cdot x_i$
Pour $(x_i)_{i\in I}\in E^I$ *on appelle support de* $(x_i)_{i\in I}$ *l'ensemble* $\operatorname{supp}((x_i)_{i\in I})=\{i\in I,\, x_i\neq 0\}$, *lorque* $\operatorname{supp}((x_i)_{i\in I})$ *est fini on dira que la famille est à support fini.*
On notera $E^{(I)}$ *la partie des éléments de* E^I *à support fini.*
$E^{(I)}$ *est un sous-espace vectoriel de* $(E^I,+,\cdot)$
En particulier $\mathbf{K}^I$ *est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel et* $\mathbf{K}^{(I)}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{K}^I$.

Définition 11 (applications bilinéaires)
Soit $E_1,\ E_2,\ F$ *trois* $\mathbf{K}$ *espaces vectoriels et* f *une application de* $E_1\times E_2$ *dans* F
f *est bilinéaire si*

1. $\forall\vec{y}\in E_2,\ \begin{array}{ccc} E_1 & \to & F \\ \vec{x} & \mapsto & f(\vec{x},\vec{y})\end{array}$ *est linéaire*
2. $\forall\vec{x}\in E_1,\ \begin{array}{ccc} E_2 & \to & F \\ \vec{y} & \mapsto & f(\vec{x},\vec{y})\end{array}$ *est linéaire*

Si de plus $\forall(\vec{x},\vec{y})$

- $f(\vec{x},\vec{y})=f(\vec{y},\vec{x})$ *on dit que* f *est une application bilinéaire symétrique*
- $f(\vec{x},\vec{y})=-f(\vec{y},\vec{x})$ *on dit que* f *est une application bilinéaire antisymétrique*

1.5 Algèbres

Définition 12 *Soit*
A *un ensemble non vide muni de deux lois de compositions internes* $+$ *et* $\times$ *et d'une loi de composition externe* $\cdot$
On dit que $(A,+,\times,\cdot)$ *est une* $\mathbf{K}$ *algèbre si*

- $(A,+,\times)$ *est un anneau*
- $(A,+,\cdot)$ *est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel*
- $\forall\lambda\in\mathbf{K},\ \forall(\vec{x},\vec{y})\in A^2,\ (\lambda\cdot\vec{x})\times\vec{y}=\vec{x}\times(\lambda\cdot\vec{y})=\lambda\cdot(\vec{x}\times\vec{y})$

Exemple 2 • *Si* E *est un* $\mathbf{K}$ *espace vectoriel,* $(\mathcal{L}(E),+,\circ,\cdot)$ *est une* $\mathbf{K}$ *algèbre.*

- *Si* $n\in\mathbb{N}^*$, $(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}),+,\times,\cdot)$ *est une* $\mathbf{K}$ *albèbre*
- $(\mathbf{K},+,\times,\cdot)$ *est une* $\mathbf{K}$ *algèbre.*
- *Soit* $\mathcal{X}$ *un ensemble non vide, considérons* $\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathbf{K})$ *l'ensemble des applications de* $\mathcal{X}$ *dans* $\mathbf{K}$, $(\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathbf{K}),+,\times,\cdot)$ *est une* $\mathbf{K}$ *algèbre*

- *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ considérons l'application*
  $f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \to & \mathbf{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = {x_1}^{\alpha_1}.{x_2}^{\alpha_2} \ldots {x_n}^{\alpha_n} \end{array}$, *f_α est une fonction monôme de n variables.*
  On note $\mathcal{P}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K})$, on notera aussi $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ le sous espace vectoriel engendré par $\{f_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{N}^n\}$
  $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K})$
  $\mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n] = \{ \sum\limits_{(a_\alpha) \in \mathbf{K}^{(\mathbb{N}^n)}} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n} \}$ *où* $X_k : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \to & \mathbf{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_k \end{array}$
  ($\mathbf{K}^{(\mathbb{N}^n)}$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{K}^{\mathbb{N}^n}$ à support fini (voir ci-dessus))

2 Combinaisons linéaires

Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique nulle, E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel et I un ensemble non vide.

2.1 Notations

1. Soit A un ensemble non vide, on appelle famille d'éléments de A indexée par l'ensemble I, une application de I dans A. Dans ce contexte l'application : $a : \begin{array}{ccc} I & \to & A \\ i & \mapsto & a(i) \end{array}$ se note $(a_i)_{i \in I}$ et l'ensemble des familles de A indexées par I se note A^I

   Proposition 10
   Si E est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel et I un ensemble non vide alors E^I est un $\mathbf{K}$ espace vectoriel si on le munit des deux lois :
   (a) $\forall (x, y) \in E^I \times E^I,\ x = (x_i)_{i \in I},\ y = (y_i)_{i \in I},\quad x + y = z,\ z = (z_i)_{i \in I}$ *avec* $\forall i \in I,\ z_i = x_i + y_i$.
   (b) $\forall (\lambda, x) \in \mathbf{K} \times E^I,\ x = (x_i)_{i \in I},\quad \lambda \cdot x = y,\ y = (y_i)_{i \in I}$ *avec* $\forall i \in I,\ y_i = \lambda \cdot x_i$
2. Pour $(x_i)_{i \in I} \in E^I$, on note $\mathrm{supp}((x_i)_{i \in I}) = \{i \in I,\ x_i \neq 0\}$, $\mathrm{supp}((x_i)_{i \in I})$ est le support de la famille $(x_i)_{i \in I}$, si le support est de cardinal fini, on dit que la famille est à support fini.
3. On note $E^{(I)}$ l'ensemble des familles de E à support fini.

   Proposition 11
   $E^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de E^I
4. Si I est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, il existe φ une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur I. Pour $(x_i)_{i \in I} \in E^I$, comme l'addition dans E est commutative, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$ ne dépend pas de la bijection φ, on note $\sum\limits_{i \in I} x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)}$
5. Pour un ensemble I quelconque et $(x_i)_{i \in I} \in E^{(I)}$ on note $\sum\limits_{i \in I} x_i$ le vecteur $\sum\limits_{i \in \mathrm{supp}((x_i)_{i \in I})} x_i$

2.2 Définitions

Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel et I un ensemble non vide

Remarque 3
Si $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ et $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ alors $(\lambda_i x_i)_{i \in I} \in E^{(I)}$

Définition 13
Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ et $x \in E$, on dit que x est combinaison linéaire des éléments de la famille $(x_i)_{i \in I}$ s'il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^{(I)}$ telle que $x = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i \cdot x_i$

On notera vect $< (x_i)_{i \in I} >$ l'ensemble de ces combinaisons linéaires

Proposition 12
vect $< (x_i)_{i \in I} >$ *est un sous-espace vectoriel de E, c'est le sous-espace vectoriel engendré par la partie de E, $\{x_i \in E,\ i \in I\}$, soit* vect $< (x_i)_{i \in I} >=$ vect $< \{x_i \in E,\ i \in I\} >$

Définition 14 (Système libres, générateurs, bases) *Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel et $(x_i)_{i \in I} \in E^I$, on dit que la famille $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est :*
- **Libre** *si $\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ alors $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I,\ \lambda_i = 0$.*
  Une famille qui n'est pas libre est dite liée
- **Génératrice** *si $E =$ vect $< (x_i)_{i \in I} >$, c'est à dire $\forall x \in E,\ \exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbf{K}^{(I)},\ x = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i$*
- **Une base de** *E si c'est une famille libre et génératrice.*

2.3 Propriétés des familles libres

Soit $\mathcal{S} = (\vec{u}_i)_{i\in I} \in E^I$

P₁ $\mathcal{S}$ est libre si et seulement si $\forall (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)},\ \forall (\beta_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)},\ \sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i = \sum_{i\in I} \beta_i \vec{u}_i \Rightarrow \forall i \in I,\ \alpha_i = \beta_i$

P₂ $\mathcal{S}$ est libre si et seulement si $\forall \vec{a} \in E$ le système $\begin{cases} \sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{a} \\ (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)} \end{cases}$ admet au plus une solution

P₃ $\mathcal{S}$ est libre si et seulement si l'application : $\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{(I)} & \to & E \\ (\alpha_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i \end{array}$ est injective.

P₄ Soit $\vec{u}_1 \in E$, $\mathcal{S} = (\vec{u}_1)$ est libre si et seulement si $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$. $(\vec{0})$ est lié

P₅ $\mathcal{S} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ est liée si et seulement si $\vec{u}_1 = \vec{0}$ ou $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$

P₆ $\mathcal{S} = (\vec{u}_i)_{i\in I},\ (\vec{u}_i)_{i\in I} \in E^I$. $\mathcal{S}$ est liée si et seulement si $\exists i_0 \in I, \exists (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)},\ \vec{u}_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \alpha_i \vec{u}_i$

P₇ Soit $\mathcal{S} = (\vec{u}_i)_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs de E et $\vec{u} \in E$, on considère la famille $\mathcal{S}' = (\vec{u}_i)_{i\in I_1}$ avec $I_1 = I \cup \{\alpha\},\ \alpha \notin I$ et $\vec{u}_\alpha = \vec{u}$
$\mathcal{S}'$ est libre si et seulement si $\vec{u} \notin \text{vect} < \mathcal{S} >$

P₈ Toute famille de vecteurs extraite d'une famille libre est libre.

P₉ Toute famille de vecteurs contenant une sous famille liée est liée.

P₁₀ Toute famille de vecteurs contenant le vecteur nul est liée.

2.4 Propriétés des systèmes générateurs

Soit $\mathcal{S} = (\vec{u}_i)_{i\in I} \in E^I$

P₁ $\mathcal{S}$ est un système générateur si et seulement si $\forall \vec{a} \in E$ le système $\begin{cases} \sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{a} \\ (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)} \end{cases}$ admet au moins une solution

P₂ $\mathcal{S}$ est un système générateur si et seulement si l'application : $\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{(I)} & \to & E \\ (\alpha_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i \end{array}$ est surjective.

P₃ Toute famille de vecteurs de E qui contient une sous famille génératrice de E est une famille génératrice de E.

P₄ Si $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et $(\vec{v}_j)_{j\in J}$ est une famille de vecteurs de E telle que $\{\vec{u}_i,\ i \in I\} \subset \{\vec{v}_j,\ j \in J\}$ alors $(\vec{v}_j)_{j\in J}$ est une famille génératrice de E.

2.5 Propriétés des bases

Soit $\mathcal{S} = (\vec{u}_i)_{i\in I} \in E^I$

P₁ $\mathcal{S}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire unique de vecteurs de $\mathcal{S}$.
Si $\mathcal{S}$ est une base de E et pour $\vec{u} \in E$ on a $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ et $\vec{u} = \sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i$ alors $(\alpha_i)_{i\in I}$ est le système de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{S}$, pour $i \in I$, α_i est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{S}$.
Avec les notations précédentes, pour $i \in I$ l'application φ_i, définie par : $\varphi_i : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{K} \\ \vec{u} & \mapsto & \alpha_i \end{array}$ qui au vecteur $\vec{u}$ associe sa ième coordonnée est une forme linéaire sur E, $\varphi_i \in E^*$

P₂ $\mathcal{S}$ est une base si et seulement si $\forall \vec{a} \in E$ le système $\begin{cases} \sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{a} \\ (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)} \end{cases}$ admet exactement une solution

P₃ $\mathcal{S}$ est une base si et seulement si l'application : $\begin{array}{ccc} \mathbf{K}^{(I)} & \to & E \\ (\alpha_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} \alpha_i \vec{u}_i \end{array}$ est bijective (c'est alors un isomorphisme d'espace vectoriel) .

P₄
- Une base est une famille libre et maximale pour l'inclusion.
- Une base est une famille génératrice et minimale pour l'inclusion.

P₅ $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$ appelée base canonique de $\mathbf{K}[X]$

P₆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on pose $f_\alpha : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \to & \mathbf{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & x_1^{\alpha_1} \times \cdots \times x_n^{\alpha_n} \end{array}$
La famille $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$ est une base de $\mathcal{P}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K})$ appelée base canonique de $\mathcal{P}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K})$

3 Somme de sous-espaces vectoriels

Quelques éléments ont déjà été introduits dans "Espaces vectoriels -premières notions"

Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel où $\mathbf{K}$ est un corps de caractéristique nulle.
Soit $E_1, \ldots, E_p$ p sous-espaces vectoriels de E
On a défini :

Somme de deux sous-espaces vectoriels :
$E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2 \in E, (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2\}$, on a $E_1 + E_2 = \text{Vect} < \mathrm{E}_1 \cup \mathrm{E}_2 >$

Somme de p sous-espaces vectoriels :
$E_1 + \cdots + E_p = \{x_1 + \cdots + x_p \in E, (x_1, \cdots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p\}$, on a $E_1 + \cdots + E_p = \text{Vect} < \bigcup\limits_{i=1}^{p} E_i >$

3.1 Somme directe

Définition 15
On dit que les sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$ sont en somme directe et on note $E_1 \oplus + \cdots + \oplus E_p$ si
$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in E_1 \times \ldots \times E_p,\ x_1 + \cdots + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0$
$E_1 \oplus + \cdots + \oplus E_p$ désigne aussi le sous-espace vectoriel somme, $E_1 + \cdots + E_p$ lorsque la somme est directe.

Famille de projecteurs associée à une décomposition :

Proposition 13 *Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel, $E_1, \ldots E_p$ p sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$*

pour $i \in [\![1, p]\!]$ soit p_i la projection vectorielle sur E_i parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} E_k$ on a :

- $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i^2 = p_i$
- $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$
- $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = I_E$ *où I_E est l'application identité de E*

Définition 16
Lorsque $p = 2$ et E_1, E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, on dit que sont supplémentaires si $E = E_1 \oplus E_2$

Proposition 14 *E_1 et E_2 sont supplémentaires si et seulement si*

1. $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ *2.* $E = E_1 + E_2$

Exemple 3 *$E = \mathbf{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$, $P_0 \in E$, $d°P_0 = n + 1$ on note $\mathbf{K}_n[X] = \{P \in E, d°P \leq n\}$ le sous-espace vectoriel constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n, et $P_0\mathbf{K}[X] = \{P_0 Q,\ Q \in E\}$ l'idéal de $\mathbf{K}[X]$ engendré par P_0, c'est aussi un sous-espace vectoriel de E. On a :*

$$\mathbf{K}[X] = \mathbf{K}_n[X] \oplus P_0\mathbf{K}[X]$$

3.2 Somme directe en dimension finie

Théorème 1 *Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, E_1 et E_2 2 sous-espaces vectoriels de E Soit*

- $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_p)$ *une base de E_1*
- $\mathcal{B}_2 = (e_{p+1}, \ldots, e_{p+q})$ *une base de E_2*
- $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{p+q})$

On a :

1. *$\mathcal{B}$ est un système générateur de $E_1 + E_2$*
2. *$E = E_1 + E_2$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est un système générateur de E*
3. *$E_1 \oplus E_2$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est libre*
4. *$E_1 \oplus E_2$ si et seulement si* $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$
5. *$E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base de E*
6. *$E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et* $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$
7. *$E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si $E = E_1 + E_2$ et* $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2$

Extension :

Théorème 2 *Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, $E_1, \dots E_p$ p sous-espaces vectoriels de E Soit*

- $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_{r_1})$ *une base de* E_1
- $\mathcal{B}_2 = (e_{r_1+1}, \dots, e_{r_2})$ *une base de* E_2, $\dim E_2 = r_2 - r_1$

  $\vdots$
- $\mathcal{B}_p = (e_{r_{p-1}+1}, \dots, e_{r_p})$ *une base de* E_p $\dim E_p = r_p - r_{p-1}$
- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{r_p})$

On a :

1. $\mathcal{B}$ *est un système générateur de* $E_1 + \ldots + E_p$
2. $E = E_1 + \cdots + E_p$ *si et seulement si* $\mathcal{B}$ *est un système générateur de* E
3. $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ *si et seulement si* $\mathcal{B}$ *est libre*
4. $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ *si et seulement si* $\dim(E_1 + \cdots + E_p) = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$
5. $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ *si et seulement si* $\mathcal{B}$ *est une base de* E
6. $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ *si et seulement si* $E_1 \oplus \cdots E_p$ *et* $\dim E = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$
7. $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ *si et seulement si* $E = E_1 + \cdots + E_p$ *et* $\dim E = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$

Exercice 1

Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel de dimension finie, $\dim E = n$ et $p_1, \cdots, p_r$ r projecteurs de E, $r \in N^*$. On suppose que $p_1 + \cdots + p_r = I_E$ où I_E est l'application identité de E.

Montrer que $E = \mathrm{Im} p_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im} p_r$ et que $\forall (i,j) \in [\![1, r]\!]^2$, $i \neq j$ on a $p_i \circ p_j = 0$

Indications :

1. On montre que si p est un projecteur alors $rang(p) = \mathrm{tr(p)}$ (voir :trace d'une application linéaire)
2. Comme $p_1 + \cdots + p_r = I_E$ on en déduit que $E = \mathrm{Im} p_1 + \cdots + \mathrm{Im} p_r$
3. De $p_1 + \cdots + p_r = I_E$ on déduit aussi $\mathrm{tr} p_1 + \cdots + \mathrm{tr} p_r = \mathrm{tr} I_E$ puis $\dim E = \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Im} p_i$
4. On a alors :
   - $E = \mathrm{Im} p_1 + \cdots + \mathrm{Im} p_r$
   - $\dim E = \sum_{i=1}^{r} \dim \mathrm{Im} p_i$

   On en déduit que : $E = \mathrm{Im} p_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im} p_r$ voir théorème 2
5. On a aussi $(p_2 + \cdots + p_r) = I_E - p_1$ soit $(p_2 + \cdots + p_r)$ est un projecteur, $\mathrm{Im}(p_2 + \cdots + p_r) = \ker p_1$, $\mathrm{Im}(p_2 + \cdots + p_r) \subset \mathrm{Im} p_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im} p_r$ avec $\dim \mathrm{Im}(p_2 + \cdots + p_r) = \dim \ker p_1$ et $\dim (\mathrm{Im} p_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im} p_r) = \dim E - \dim \mathrm{Im} p_1 = \dim \ker p_1$, on en déduit que $\mathrm{Im}(p_2 + \cdots + p_r) = \mathrm{Im} p_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im} p_r$
   par suite $\ker p_1 = \mathrm{Im} p_2 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im} p_r$ et $p_1 \circ p_k = 0, \forall k \neq 1$, on montre de même que :
   $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$ on a $p_i \circ p_j = 0$, et $p_1, \ldots, p_r$ est la famille de projecteurs associée à la décomposition $E = \mathrm{Im} p_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im} p_r$

Définition 17 (Bases adaptées)

Base adaptée à un sous-espace vectoriel :

Soit F un sous-espace vectoriel de E, $\dim F = p$ on appelle base de E adaptée au sous-espace vectoriel F toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F.

Base adaptée à une décomposition $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$:

On considère une décomposition de E en somme directe de sous-espaces vectoriels, $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$, soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_{r_1})$ une base de E_1, $\mathcal{B}_2 = (e_{r_1+1}, \dots, e_{r_2})$ une base de $E_2, \dots, \mathcal{B}_p = (e_{r_{p-1}+1}, \dots, e_{r_p})$ une base de E_p, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{r_p})$ est alors une base de E, c'est une base adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus \cdots E_p$ (remarque : $r_p = n$)

4 Applications linéaires

Voir

- espaces vectoriels premières notions
- espaces vectoriels de dimension finie

4.1 Image et noyau d'une application linéaire

Théorème 3
Si *E et F sont deux* $\mathbf{K}$ *espaces vectoriels,* $u \in \mathcal{L}(E,F)$ *et* E' *est un supplémentaire de* $\ker u$ *dans* E

Alors $\begin{array}{ccc} E' & \to & \mathrm{Im} u \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Théorème 4
Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel et E' un sous espace vectoriel. On suppose que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E', $E = E' \oplus F_1$, $E = E' \oplus F_2$.
Soit p le projecteur de E sur F_1 parallèlement à E' :

L'application $p_1 : \begin{array}{ccc} F_2 & \to & F_1 \\ x & \mapsto & p(x) \end{array}$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Conséquence :

Théorème 5
Si *E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel et E' un sous espace vectoriel. On suppose que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E' et que F_1 est de dimension finie*
Alors *F_2 est aussi de dimension finie et* $\dim F_1 = \dim F_2$

4.2 Codimension

Définition 18
On dit qu'un sous-espace vectoriel E' de E est de codimension finie s'il existe un supplémentaire F de E' de dimension finie, et on appelle codimension de E' la dimension de F, on note : $\mathrm{codim} E' = \dim F$
(cette définition ne dépend pas du supplémentaire F).

Exemple 4 *Pour $n \in \mathbb{N}$ dans $\mathbf{K}[X]$ et $P \in \mathbf{K}[X]$, $d°P = n$ on a :* $\mathrm{codim} P\mathbf{K}[X] = n$

Proposition 15
Si E est de dimension finie alors tout sous espace vectoriel F est de codimension finie et $\dim E = \dim F + \mathrm{codim} F$

4.3 Rang d'une application linéaire

Proposition 16 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$*
Si E ou F est de dimension finie alors $\mathrm{Im} u$ *est de dimension finie*

Définition 19 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$*
Si $\mathrm{Im} u$ *est de dimension finie alors on appelle rang de u la dimension de* $\mathrm{Im} u$, *on note* $\mathrm{rg} u = \dim \mathrm{Im} u$

Proposition 17 **Si** *E et F sont deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels avec F de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E,F)$*
Alors $\ker u$ *est de codimension finie, u est de rang fini et* $\mathrm{codim} \ker u = \dim \mathrm{Im} u = \mathrm{rg} u$

Proposition 18 **Si** *E et F sont deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels avec E de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E,F)$*
Alors *u est de rang fini et* $\dim E = \dim \ker u + \dim \mathrm{Im} u$

En dimension finie on retrouve le théorème du rang

Théorème 6 *Soit E et F deux $\mathbf{K}$ espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E,F)$ on a*
u est un isomorphisme d'espace vectoriel si et seulement si
- $\dim E = \dim F$
- $\mathrm{rg} u = \dim F$

Proposition 19 *Soit E, F et G trois $\mathbf{K}$ espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$on a*
1. *Si u est un isomorphisme d'espace vectoriel et G est de dimension finie* $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg} v$
2. *Si v est un isomorphisme d'espace vectoriel et E est de dimension finie* $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg} u$

On ne change pas le rang d'une application linéaire par composition avec un isomorphisme d'espace vectoriel.

4.4 Polynômes d'interpolation de Lagrange

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ éléments de $\mathbf{K}$ distincts deux à deux.
$\mathbf{K}_n[X] = \{P \in \mathbf{K}[X],\ d^\circ P \leq n\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ de dimension finie $n+1$

Définition 20
Les polynômes d'interpolation de de Lagrange aux points $a_0, \dots, a_n$ sont les polynômes définis par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ L_k(X) = \frac{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(X-a_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(a_k-a_i)} = \frac{\pi_k(X)}{\pi'(a_k)} \text{ avec } \pi(X) = \prod_{i=0}^{n}(X-a_k),\ \pi_k(X) = \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(X-a_i) = \frac{\pi(X)}{X-a_k}$$

Proposition 20
$(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbf{K}_n(X)$ et si $P \in \mathbf{K}_n(X)$ alors $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)L_k(X)$

Proposition 21
On considère : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \to & \mathbf{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{array}$ *on a :*

- $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbf{K}[X], \mathbf{K}^{n+1})$, $\quad \ker\varphi = \pi\mathbf{K}[X]$ *avec* $\pi(X) = \prod\limits_{i=0}^{n}(X-a_i)$
- $\varphi_{|\mathbf{K}_n[X]}\ \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \to & \mathbf{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{array}$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels*

Si $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ on a $\varphi^{-1}(\{(b_0, \dots, b_n)\}) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k L_k + \pi\mathbf{K}[X]$

Proposition 22
Si $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ Alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P(a_k) = b_k$, on a $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k L_k(X)$.

5 Espace dual

Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel, on appelle dual de E l'espace vectoriel des formes linéaires sur E, on le note E^*, quad $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$
Si E est de dimension finie alors $\dim E^* = \dim E$

5.1 Hyperplans

Définition 21 *On appelle hyperplan d'un $\mathbf{K}$ espace vectoriel E tout sous-espace vectoriel de codimension 1.*

Proposition 23 *Soit H un hyperplan de E, $u \notin H$ et $D = \mathbf{K}u$ la droite vectorielle engendrée par u, on a $E = H \oplus D$*

Proposition 24 *Si $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$ alors $\ker\varphi$ est un hyperplan de E*

Proposition 25 *Soit H un hyperplan de E, on a :*

1. *L'ensemble des formes linéaires dont le noyau contient H est une droite vectorielle de E^**
2. *Pour $e \notin H$ il existe une unique forme linéaire φ telle que $\ker\varphi = H$ et $\varphi(e) = 1$*

Conséquence : Si $(\varphi_1, \varphi_2) \in E^* \times E^*$ et $\ker\varphi_1 = \ker\varphi_2$, avec $\varphi_1 \neq 0$ alors $\exists\lambda \in \mathbf{K},\ \lambda \neq 0$ tel que $\varphi_2 = \lambda\varphi_1$.

5.2 Dualité en dimension finie

Dans ce paragraphe on suppose que E est de dimension finie $\dim E = n$, soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

5.2.1 Equation d'un hyperplan

Soit $\varphi \in E^*$ on a $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbf{K} \\ \vec{x} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n & \mapsto & a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \end{array}$ avec $\forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k = \varphi(e_k)$

$\varphi \neq 0 \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$

$\ker \varphi$ admet pour équation : $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$

Proposition 26 *L'application* $\theta : \begin{array}{ccc} E^* & \to & \mathbf{K}^n \\ \varphi & \mapsto & (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \end{array}$ *est un isomorphsime d'espace vectoriel*

Proposition 27 *Soit H_1 et H_2 deux hyperplans admettant pour équation respective*

$\mathbf{H_1} :\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$

$\mathbf{H_2} :\ b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n = 0$

on a : $H_1 = H_2$ si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbf{K},\ \lambda \neq 0,\ (b_1, \ldots, b_n) = \lambda(a_1, \ldots, a_n)$.

6 Documents connexes

- espaces vectoriels premières notions
- espaces vectoriels de dimension finie