ESPACES EUCLIDIENS

Ce document n'est pas un cours mais présente seulement quelques notions à connaître sur le sujet. Dans ce chapître E désigne un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie.

1 Espaces préhilbertiens réels

1.1 Formes bilinéaires symétriques

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel

Définition 1
Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire sur E si :

1. $\forall x \in E,\ y \mapsto \varphi(x, y)$ *est linéaire*
2. $\forall y \in E,\ x \mapsto \varphi(x, y)$ *est linéaire*

Si de plus $\forall (x, y),\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ on dira que φ est symétrique.

Soit $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E et $\mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E.

Remarque 1
Une forme bilinéaire φ sur E qui vérifie $\forall (x, y),\ \varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$ est appelée une forme bilinéaire antisymétrique soit $\mathcal{L}_{a2}(E, \mathbb{R})$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E.

Exemple 1

- $E = \mathbb{R}^n$, *pour* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ *soit* $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k y_k \end{array}$, $\varphi \in \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$
- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ n \geq 1, \quad \varphi : (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(AB), \quad \varphi \in \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$
- $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})\ a < b, \quad \varphi : (f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t, \quad \varphi \in \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$
- $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \quad \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\} \quad \varphi : (u, v) \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k, \quad \varphi \in \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$
- $E = \mathbb{R}^2, \varphi : ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto 2x_1y_2 - x_2y_1 \quad \varphi \in \mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$ *mais* $\varphi \notin \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$.

Proposition 1 $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$ *est un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel et* $\mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R})$

Remarque 2
On aussi $\mathcal{L}_{a2}(E, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel et $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{R}) = \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R}) \oplus \mathcal{L}_{a2}(E, \mathbb{R})$

1.2 Formes quadratiques

Définition 2
On appelle forme quadratique sur E toute application $Q : E \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique φ telle que : $\forall x \in E,\ Q(x) = \varphi(x, x)$.
Q est la forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique φ.

1.2.1 Propriétés

1. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \quad Q(\lambda \cdot x) = \lambda^2 \cdot Q(x)$
2. $\forall (x, y) \in E^2, \quad Q(x + y) = Q(x) + 2\varphi(x, y) + Q(y)$
3. Soit $\mathcal{Q}(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E
   - $(\mathcal{Q}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
   - $\begin{array}{ccc} (\mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R}), +, \cdot) & \to & (\mathcal{Q}(E), +, \cdot) \\ \varphi & \mapsto & Q \end{array}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

- $Q(x+y) = Q(x) + Q(y) + 2\varphi(x,y)$
  $Q(x+y) + Q(x-y) = 2(Q(x) + Q(y))$
  $Q(x+y) - Q(x-y) = 4\varphi(x,y)$
  $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$
  $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{4}(Q(x+y) - Q(x-y))$
  (identités de polarisation)

4. Q est la forme quadratique associée à φ
5. φ est la forme polaire associée à Q

Exemple 2

- *Pour* $f \in E^*$, $\quad f^2 \in \mathcal{Q}(E)$ *de forme polaire associée* $(x,y) \mapsto f(x)f(y)$
- *Pour* $(f_1, f_2) \in (E^*)^2$, $\quad f_1 \times f_2 \in \mathcal{Q}(E)$ *et la forme polaire associée est définie par :*
  $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{2}[f_1(x) \cdot f_2(y) + f_1(y) \cdot f_2(x)]$
- $Q : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)P^{"}(t)\mathrm{d}t \end{array}$, $Q \in \mathcal{Q}(E)$ *de forme polaire associée :*
  $(P,Q) \mapsto \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_0^1 P(t)Q^{"}(t) + P^{"}(t)Q(t)\mathrm{d}t\right)$

1.3 Formes bilinéaires symétriques de signe constant

Définition 3

Soit $\varphi \in \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$ *de forme quadratique associée* Q*, on dit que :*

1. φ *(resp.* Q*) est positive si* $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geq 0$
2. φ *(resp.* Q*) est définie positive si* $\forall x \in E \setminus \{\vec{0}\},\ \varphi(x,x) > 0$

Théorème 1 (inégalité de Cauchy Schwarz)

- *Si* φ *est une forme bilinéaire symétrique positive sur* E *alors* $\forall (x,y) \in E^2,\ \mid \varphi(x,y) \mid \leq \sqrt{Q(x)}\sqrt{Q(y)}$
- *Si, de plus,* φ *est définie positive, l'égalité a lieu si et seulement si* (x,y) *est une famille liée.*

1.4 Formes quadratiques en dimension finie

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimenson finie, $\dim E = n,\ n \geq 1$, et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E.

Pour $\varphi \in \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R})$, posons $A_\varphi = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, on a $A_\varphi \in \mathcal{M}_{sn}(\mathbb{R})$ (espace vectoriel des matrices symétriques carrée d'ordre n), $\quad A_\varphi$ est la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$,

Pour $\vec{x} \in E$ notons X le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$, $\vec{x} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

On a : $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2,\ \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = {}^tXA_\varphi Y$

Proposition 2

L'application : $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{s2}(E, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{sn}(\mathbb{R}) \\ \varphi & \mapsto & A_\varphi \end{array}$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Changement de base :

Soit $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une autre base de E et P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$, P est la matrice des coordonnées des vecteurs $(\vec{u}_i)$ dans la base $\mathcal{B}$. Soit $A_{1\varphi}$ la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_1$, on a :

$$A_{1\varphi} = {}^tPAP$$

1.5 Espaces préhilbertiens réels

1.5.1 Définition

Définition 4
Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, on appelle produit scalaire sur E une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.

Définition 5
On appelle espace préhilbertien réel un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $<,>$.
$<,>\in \mathcal{L}_{s2}(E,\mathbb{R})$ et $<,>$ est définie positive.

Définition 6
On appelle espace euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Exemple 3

1. $(\mathbb{R}^n, <,>)$ *avec* $<(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)>=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, *est un espace euclidien*
2. $(\mathcal{M}_{n,p}, <,>)$ *avec* $\forall (A,B)\in\mathcal{M}_{n,p}(R)^2 \;\; <A,B>=\mathrm{tr}({}^tAB)$, *est un espace euclidien.*
3. *Pour I intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle, soit $\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications continues sur I et de carré intégrable sur I, on pose pour $(f,g)\in\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R})^2$, $<f,g>=\displaystyle\int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t$, $\quad(\mathcal{L}_c^2(I,\mathbb{R}),<,>)$, est un espace préhilbertien réel.*
4. *Soit $\ell^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable, on pose pour $(u,v)\in\ell^2(\mathbb{R})^2$,*
$<u,v>=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$, $\quad(\ell^2(\mathbb{R}),<,>)$ *est un espace préhilbertien réel.*

1.5.2 Propriétés du produit scalaire

Soit $(E,<,>)$ un espace préhilbertien réel, pour $x\in E$ on pose $\| x \|=\sqrt{<x,x>}$.
Pour $(x,y)\in E^2$:

- $|<x,y>|\leq \| x \| . \| y \|$ (inégalité de Cauchy Schwarz) avec égalité si et seulement si (x,y) est lié.
- $(E,\| \;\; \|)$ est un espace vectoriel normé
- Soit $a\in E$, $\quad a=0$ si et seulement si $\forall z\in E, <a,z>=0$
- Soit $a\in E$, $\quad \| a \|=\sup\limits_{\|z\|\leqslant 1} |<a,z>|$
- $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2<x,y>+\|y\|^2$
- $\| x+y \|^2+\| x-y \|^2=2(\| x \|^2+\| y \|^2)$ (identité du parallélogramme)
- Pour $(a,b,c)\in E^3$, $\| a-b \|^2+\| a-c \|^2=2\| a-\dfrac{b+c}{2} \|^2+\dfrac{1}{2}\| b-c \|^2$ (identité de la médiane)
- Identités de polarisation :
$$<x,y>=\frac{1}{2}(\| x+y \|^2-\| x \|^2-\| y \|^2)$$
$$<x,y>=\frac{1}{4}(\| x+y \|^2-\| x-y \|^2)$$

1.5.3 Orthogonalité

Soit $(E,<,>)$ un espace préhilbertien réel

Définition 7

- *Deux éléments x et y de E sont orthogonaux si $<x,y>=0$, on note $x\perp y$*
- *Si $A\subset E$ et $x\in E$, on dit que x est orthogonal à A si x est orthogonal à tous les vecteurs de A, on note A° ou $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à A, $A^\perp=\{x\in E, \forall y\in A, <x,y>=0\}$*

Proposition 3

- *Si $A\subset E$ Alors $A^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de E*
- *Si $A\subset E$ Alors $A^\perp=(\mathrm{vect}<A>)^\perp$*

Théorème 2

- *Si* $(x,y)\in E^2$ *Alors* $\quad x\perp y \Leftrightarrow \| x+y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$
- *Si* $x_1,\dots,x_n$ *sont* n *vecteurs de* E *orthogonaux deux à deux Alors* $\| \sum_{k=1}^{n} x_k \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \| x_k \|^2$

Définition 8

- *Une famille* $(x_i)_{i\in I}\in E^I$ *est une famille orthogonale si* $\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j,\ <x_i,x_j>=0$
- *Une famille* $(x_i)_{i\in I}\in E^I$ *est une famille orthonormée si* $\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j,\ <x_i,x_j>=0$ *et* $\| x_i \|=1$

Proposition 4

Une famille orthogonale de vecteurs non-nuls est une famille libre

Proposition 5

Si $(e_1,\dots,e_n)$ *est une famille orthonormée de vecteurs de* E*, soit* $F=\mathrm{vect}<\mathrm{e}_1,\dots,\mathrm{e}_\mathrm{n}>$ *Alors*

- $\forall x\in F,\ x=\sum_{k=1}^{n} <e_k,x>e_k$
- $\forall x\in F,\ \| x \|^2=\sum_{k=1}^{n} |<e_k,x>|^2$
- $\forall (x,y)\in F^2,\ <x,y>=\sum_{k=1}^{n} <e_k,x><e_k,y>$
- *Si* $x=\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\,,\quad y=\sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ *Alors* $\quad d(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}.$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(u_k)_{k\in I}$ une famille libre de E avec $I=[\![0,n]\!]$, $n\in\mathbb{N}$ ou $I=\mathbb{N}$. On pose pour $p\in I,\ E_p=\mathrm{vect}<u_0,\dots,u_p>$. Le procédé permet de construire une famille $(e_k)_{k\in I}$ orthonormée de E telle que :
$\forall p\in I, \mathrm{vect}<e_0,\dots,e_p>=\mathrm{vect}<u_0,\dots,u_p>$

Etape 1 On construit par récurrence une famille orthogonale $(v_k)_{k\in\mathbb{I}}$:

- $v_0=u_0$
- Pour $p\in I$, supposons construit , $v_0,\dots,v_{p-1}$, au rang p :

$$v_p=u_p+\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k v_k \text{ avec } \forall k\in[\![0,p-1]\!], <v_k,v_p>=0\,,\ \text{soit } \lambda_k=-\frac{<v_k,u_p>}{<v_k,v_k>}$$

Etape 2 Pour $k\in I$ on pose $e_k=\dfrac{1}{\| v_k \|}\cdot v_k$.

Conséquence :

Théorème 3

- *Un espace euclidien possède des bases orthonormées*
- *Toute famille orthormale d'un espace euclidien* E *peut se compléter en une base orthonormée de* E*.*
- *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien complexe possède des bases orthonormées.*

1.5.4 Projection orthogonale

Proposition 6

Si F *est un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien réel* E *Alors* F *et* $F^\perp$ *sont en somme directe.*

On dit que F *et* $F^\perp$ *sont en somme directe orthogonale, on note* $F\overset{\perp}{\oplus}F^\perp$

Théorème 4 (sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux)

Si F *et* G *sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un espace préhilbertien réel* E *on a équivalence entre les propositions suivantes :*

- F *et* G *sont orthogonaux*
- $F^\perp=G$
- $G^\perp=F$

dans ces conditions on dit que F *et* G *sont supplémentaires orthogonaux,* $E=F\overset{\perp}{\oplus}G$*.*

Définition 9

Soit E *un espace préhilbertien réel et* p *une projection sur un sous-espace vectoriel* F *parallèlement à un sous-espace vectoriel* G*, on dit que* p *est une projection orthogonale si* F *et* G *sont orthogonaux.*

Proposition 7
Soit E un espace préhilbertien réel et $E_1, \ldots, E_r$, r sous-espaces vectoriels de E orthogonaux 2 à 2 tels que $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_r$, on note alors $E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} E_r$.
Pour $k \in [\![1, r]\!]$ on a $E_k^\perp = \underset{\substack{1 \leq i \leq r \\ i \neq k}}{\overset{\perp}{\oplus}} E_i$ et si p_k est la projection orthogonale sur E_k :

- $p_1 + \ldots + p_r = \mathrm{Id}_E$
- $\forall (i,j) \in [\![1, r]\!]^2,\ i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0$

Théorème 5 (projection orthogonale)
Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie d'un préhilbertien réel E et si $x \in E$
Alors il existe un unique vecteur $p_F(x) \in F$ tel que $d(x, F) = \| x - p_F(x) \|$
$x \mapsto p_F(x)$ est une application de E dans E qui vérifie :

1. $\forall x \in E,\ p_F(x)$ *est l'unique vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$,*
   $p_F(x)$ s'appelle le projeté orthogonal de x sur F
2. $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ *et p_F est la projection orthogonale sur F,*
   p_F est continue et pour la norme subordonnée à la norme euclidienne de E, $\| p_F \| = 1$
3. $\left(F^\perp\right)^\perp = F$
4. *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de F, $\forall x \in E,\ p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < e_k, x > e_k$*

On aussi :

- $\forall x \in E, \quad \mathrm{d}(x, F)^2 = \| x \|^2 - \| p_F(x) \|^2$
- **Inégalité de Bessel :**
  - $\forall x \in E, \quad \| p_F(x) \| \leq \| x \|$
  - Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormée de E alors $\forall x \in E, \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |< e_k, x >|^2 \leq \| x \|^2$

2 Espaces euclidien

Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace euclidien rapporté une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$.

2.1 Premières propriétés

Les propriétés des espaces préhilbertiens réels s'appliquent (voir plus haut 1.5)

2.1.1 Orthogonalité

E est dimension finie de sorte que tout sous-espace vectoriel de E est aussi de dimension finie et le théorème de projection orthogonale s'applique.

Proposition 8
Tout sous-espace vectoriel F de E possède un supplémentaire orthogonal, on a :

- $E = F \oplus F^\perp$
- $(F^\perp)^\perp = F$
- *Soit* $\vec{x} \in E, \quad \vec{x} \in F \iff \forall \vec{y} \in F^\perp, < \vec{x}, \vec{y} >= 0$

2.1.2 Matrice d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Proposition 9
Soit u un endomorphisme de E et $M_u = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la matrice de u dans la base orthormée $\mathcal{B}$ on a :

- $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} =< \vec{e}_i, u(\vec{e}_j) >$
- *La trace de u est :* $\mathrm{tr}\, u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < \vec{e}_i, u(\vec{e}_i) >$
- *Le déterminant de u vaut :* $\det u = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} < \vec{e}_{\sigma(j)}, u(\vec{e}_j) >$

2.1.3 Isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur E

On considère l'espace euclidien usuel $(\mathbb{R}^n, <\,,\,>)$ rapporté à sa base canonique qui est une base orthonormée. Pour $(\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ on a $< \vec{x}, \vec{y} >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Proposition 10

L'application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & E \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n \end{array}$ *est une isométrie vectorielle de* $(\mathbb{R}^n, <\,,\,>)$ *sur* $(E, <\,,\,>)$.

2.1.4 Isomorphisme canonique de E sur E^*

Proposition 11

- *L'application :* $\begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ \vec{a} & \mapsto & \varphi_{\vec{a}} \end{array}$ *avec* $\forall \vec{x} \in E$, $\varphi_{\vec{a}}(\vec{x}) =< \vec{a}, \vec{x} >$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*
- $\forall \varphi \in E^*$, $\exists! \vec{a} \in E$, $\forall \vec{x} \in E$, $\varphi(\vec{x}) =< \vec{a}, \vec{x} >$

Remarque 3

1. *L'isomorphisme précédent est un isomorphisme canonique, il ne dépend que la structure d'espace euclidien de* E *et non d'une base de* E.
2. *Si l'on munit* E^* *de la norme subordonnée à la norme euclidienne de* E*, définie par* $\forall \varphi \in E^*$, $\| \varphi \| = \sup_{\|\vec{x}\|=1} |\varphi(\vec{x})|$, *l'isomorphisme d'espace vectoriel précédent est une isométrie vectorielle.*
   $\forall \vec{a} \in E$, $\| \varphi_{\vec{a}} \| = \| \vec{a} \|$

   Preuve. *on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*
   - $\forall \vec{x} \in E$, $| < \vec{a}, \vec{x} > | \leqslant \| \vec{a} \| . \| \vec{x} \|$, *soit* $|\varphi_{\vec{a}}(\vec{x})| \leqslant \| \vec{a} \| . \| \vec{x} \|$ *de sorte que* $\| \varphi_{\vec{a}} \| \leqslant \| \vec{a} \|$
   - *L'inégalité précédente est une égalité pour* $\vec{x} = \vec{a}$ *de sorte que* $\| \varphi_{\vec{a}} \| \geqslant \| \vec{a} \|$

   Par suite $\| \varphi_{\vec{a}} \| = \| \vec{a} \|$. ∎

2.2 Adjoint d'un endomorphisme

2.2.1 Définition

Théorème 6
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ *il existe un unique endomorphisme* $u^* \in \mathcal{L}(E)$ *tel que :*

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, < u(\vec{x}), \vec{y} >=< \vec{x}, u^*(\vec{y}) >$$

Définition 10
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$*, l'unique endomorphisme* $u^* \in \mathcal{L}(E)$ *du théorème précédent s'appelle l'adjoint de* u.
u^* *est défini par la relation :*

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \quad < u(\vec{x}), \vec{y} >=< \vec{x}, u^*(\vec{y}) >$$

Proposition 12
Si $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* v *est une application de* E *dans* E *telle que :* $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $< u(\vec{x}), \vec{y} >=< \vec{x}, v(\vec{y}) >$
alors v *est linéaire et* $u^* = v$

Exemple 4

1. *Soit* u *un endomorphisme dont la matrice* $M_u = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *dans la* <u>*base orthonormée*</u> $\mathcal{B}$ *est symétrique,* ${}^tM = M$*, on a* $u^* = u$*. En effet :*
   Si $M_{u^*} = (a^*_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ *est la matrice de* u^* *dans* $\mathcal{B}$ *alors* $a^*_{i,j} =< \vec{e}_i, u^*(\vec{e}_j) > =< u(\vec{e}_i), \vec{e}_j > =< \vec{e}_j, u(\vec{e}_i) > = a_{j,i}$ *et comme* M *est symétrique il vient* $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a^*_{i,j} = a_{i,j}$ *soit* $M_{u^*} = M_u$ *et par suite* $u^* = u$
2. *De même si la matrice de* u *dans une* <u>*base orthonormée*</u> *est antisymétrique,* ${}^tM_u = -M_u$*, on a* $u^* = -u$
3. *Si* p *est une projection orthogonale alors* $p^* = p$

   Exercice 1
   Soit p *une projection vectorielle d'un espace vectoriel euclidien* E.
   Montrer que p *est une projection vectorielle orthogonale si et seulement si* $p^* = p$

4. *Soit u une isométrie vectorielle, c'est à dire que u est un isomorphisme d'espace vectoriel qui conserve la norme. On a*
$$u^* = u^{-1}$$
Rappel :
- *Soit u une application de E dans E, u est une isométrie vectorielle si et seulement si u conserve le produit scalaire, c'est à dire $\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, $< u(\vec{x}), u(\vec{y}) >=< \vec{x}, \vec{y} >$.*
- *Un endomorphisme de E qui conserve le produit scalaire est un automorphisme de E appelé endomorphisme orthogonal ou automorphisme orthogonal.*
5. *Soit u une symétrie orthogonale.*
$$u^* = u$$

Exercice 2
Soit $u \in L(E)$
(a) *Si u est une symétrie vectorielle par rapport à E_1 parallèlement à E_2, montrer que u est une symétrie orthogonale si et seulement si $u^* = u$*
6. *Soit $(E, < , >)$ un espace euclidien orienté de dimension 3. Pour $\vec{a} \in E$ on considère l'application :*
$$\varphi_{\vec{a}} : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{a} \wedge \vec{x} \end{array} \quad \text{on a} \quad \varphi^*_{\vec{a}} = \varphi_{-\vec{a}}$$

2.2.2 Propriétés

Propriété 1.
Proposition 13
La matrice de l'adjoint u^* d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dans une base orthonormée est la transposée de la matrice de l'endomorphisme u dans cette base, $M_{u^*} = {}^tM_u$.
Conséquence :
Proposition 14
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u et u^* ont même rang, même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique, mêmes polynômes annulateurs, même polynôme minimal, mêmes valeurs propres, les sous-espaces propres de u et u^* associés à une valeur propre λ ont la même dimension.
u^* est diagonalisable (resp. trigonalisable) si et seulement si u est diagonalisable (resp. trigonalisable).
Propriété 2. Soit $(\lambda, u, v) \in \mathbb{R} \times E \times E$ et I_d l'endomorphisme identité de E, on a :
- $I_d^* = I_d$
- $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
- $(\lambda u)^* = \lambda u^*$
- $(u^*)^* = u$ on note aussi $u^{**} = u$
- $(u + v)^* = u^* + v^*$
- Si u est un automorphisme alors $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$
- $\ker u^* = (\mathrm{Im} u)^\perp$ et $\mathrm{Im} u^* = (\ker u)^\perp$ ce qui se note aussi $\ker u^* = (\mathrm{Im} u)^\circ$ et $\mathrm{Im} u^* = (\ker u)^\circ$
En particulier : pour λ valeur propre de u (donc aussi de u^*) $\ker(u^* - \lambda I_d) = (\mathrm{Im}(u - \lambda I_d))^\perp$
- Soit F un sous-espace vectoriel de E, F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*
- Soit $p \in \mathcal{L}(E)$, p est une projection orthogonale si et seulement si $p^2 = p$ et $p^* = p$
- Pour $u \in L(E)$ on a pour $L(E)$ rapporté à la norme subordonnée à la norme euclidienne de E,
$$\| u \| = \sup_{\substack{\|\vec{x}\| \leqslant 1 \\ \|\vec{y}\| \leqslant 1}} | < u(\vec{x}), \vec{y} > | \quad , \quad \| u^* \| = \| u \| \quad \text{et} \quad \| u \|^2 = \| u^* \circ u \| = \| u \circ u^* \|$$

2.2.3 Endomorphismes symétriques et antisymétriques

Définition 11
1. *On appelle endomorphisme symétrique (on dit aussi endomorphisme autoadjoint) tout endomorphisme u de E tel que $u^* = u$*
2. *On appelle endomorphisme antisymétrique tout endomorphisme u de E tel que $u^* = -u$*

Soit $\mathcal{L}_s(E)$ l'ensemble des endomorphismes smétriques et $\mathcal{L}_a(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques.

Proposition 15 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$*
- *u est symétrique si et seulement si la matrice de u dans une base orthonormée est symétrique*
- *u est antisymétrique si et seulement si la matrice de u dans une base orthonormée est antisymétrique.*

Si $\mathcal{M}_{sn}(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et $\mathcal{M}_{an}(\mathbb{R})$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques on a :

Proposition 16

- $L_s(E)$ *est isomorphe à* $\mathcal{M}_{sn}(\mathbb{R})$ *et* $\dim L_s(E) = \dim \mathcal{M}_{sn}(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $L_a(E)$ *est isomorphe à* $\mathcal{M}_{an}(\mathbb{R})$ *et* $\dim L_a(E) = \dim \mathcal{M}_{an}(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- $L(E) = L_s(E) \oplus L_a(E)$ *et* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{sn}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}_{an}(\mathbb{R})$

Exercice 3

Soit $(E, <\,,\,>)$ *un espace euclidien, pour* $(u,v) \in L(E)^2$ *on pose* $\ll u, v \gg = \mathrm{tr}(u^* \circ v)$

1. *Si* $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ *est une base orthonormée de* E *montrer que* $\ll u, v \gg = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} < u(\vec{e}_i), v(\vec{e}_i) >$
2. *Montrer que* $(L(E), \ll\,,\,\gg)$ *est un espace euclidien.*
3. *Montrer que* $L(E) = L_s(E) \overset{\perp}{\oplus} L_a(E)$
4. *Montrer que l'application*

$$\Phi : \begin{array}{ccc} (L(E), \ll\,,\,\gg) & \to & (L(E), \ll\,,\,\gg) \\ u & \mapsto & u^* \end{array}$$

est une symétrie orthogonale par rapport à $L_s(E)$)

2.3 Réduction des endomorphismes symétriques

Théorème 7

Soit $(E, <\,,\,>)$ *un espace euclidien et* u *un endomorphisme symétrique de* E*. On a :*

1. u *est diagonalisable*
2. *Les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux*
3. *Il existe une base orthonormée de* E *de vecteurs propres de* u

La version matricielle de ce théorème donne :

Théorème 8

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*, une matrice à cœfficients réels. On a :*

1. M *est diagonalisable*
2. *Il existe une matrice* P *orthogonale telle que* ${}^tPMP$ *est diagonale.*
   ($P \in O_n(\mathbb{R})$ *c'est à dire que* ${}^tP.P = I_n$ *soit* ${}^tP = P^{-1}$*)*

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes :
Soit $u \in L_s(E)$ de matrice M dans la base orthonormée $\mathcal{B}$

Etape1 On montre que les valeurs propre de M dans $\mathbb{C}$ sont réelles
Etape2 On montre que les sous espaces propres de u sont orthogonaux 2 à 2
Etape3 Comme $u^* = u$ on constate que si F est un sous-espace vectoriel stable par u alors $F^\perp$ est stable par u
Etape4 On montre alors le théorème par récurrence sur la dimension de E

2.4 Formes bilinéaires symétriques en dimension finie

Ce paragraphe complète celui sur les formes bilinéaires symétriques 1.1 et du 1.4 sur les formes quadratiques en dimension finie :

2.4.1 Noyau et rang

Définition 12

Soit $\varphi \in L_{s2}(E)$ *une forme bilinéaire symétrique de matrice* M_φ *dans une base* $\mathcal{B}_0$ *de* E*.*
On appelle rang de φ *le rang de la matrice* M_φ*.*
Cette définition ne dépend pas de la base $\mathcal{B}_0$ *de* E

Définition 13
Soit $\varphi \in L_{s2}(E)$ une forme bilinéaire symétrique de matrice M_φ dans une base $\mathcal{B}_0$ de E.
On dit que φ est non dégénérée si rang $\varphi = n$ où n est la dimension de E.

Proposition 17 *Soit $\varphi \in L_{s2}(E)$*
L'application : , $\Phi_\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & E^* \\ \vec{x} & \mapsto & \Phi_\varphi(\vec{x}) : \vec{y} \mapsto \varphi(\vec{x},\vec{y}) \end{array}$ *est une application linéaire.*

Définition 14
Soit $\varphi \in L_{s2}(E)$, on appelle noyau de φ le noyau de Φ_φ, $\ker\varphi = \{\vec{x} \in E,\, \Phi_\varphi(\vec{x}) = 0\}$

Proposition 18 *Soit $\varphi \in L_{s2}(E)$*

1. $\ker\varphi = \{\vec{x} \in E,\, \forall \vec{y} \in E,\, \varphi(\vec{x},\vec{y}) = 0\}$
2. *φ est non dégénérée si et seulement si* $\ker\varphi = \{0\}$
3. *φ est non dégénérée si et seulement si Φ_φ est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Proposition 19
Soit $\varphi \in L_{s2}(E)$ de matrice M_φ dans une base $\mathcal{B}_0$ de E.
Soit $\vec{x} \in E$, $\vec{x}$ de coordonnées le vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans la base $\mathcal{B}_0$, on a $\vec{x} \in \ker\varphi \iff M_\varphi X = 0$

Proposition 20
Une forme bilinéaire positive est non dégénérée si et seulement si elle est définie positive.

2.4.2 Endomorphisme associé à une forme bilinéaire symétrique

Soit $(E, <\,,\,>)$ un espace euclidien rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

Proposition 21
Pour $\varphi \in L_{s2}(E)$ il existe un unique endomorphisme symétrique $u_\varphi \in L_s(E)$ tel que :

$$\forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \varphi(\vec{x},\vec{y}) = <u_\varphi(\vec{x}),\vec{y}> = <\vec{x},u_\varphi(\vec{y})>$$

On dit que u_φ est l'endomorphisme symétrique associé à la forme bilinéaire symétrique φ .
On dit aussi que φ est la forme bilinéaire symétrique associée à l'endomorphisme symétrique u_φ.

Proposition 22

1. *Soit $\varphi \in L_{s2}(E)$ et u_φ l'endomorphisme symétrique associé.*
   Dans la base orthonormée $\mathcal{B}$, φ et u_φ ont la même matrice.
2. *L'application :* $\begin{array}{ccc} L_s(E) & \to & L_{s2}(E) \\ u & \mapsto & \varphi_u : \forall(\vec{x},\vec{y}) \in E^2,\ \varphi_u(\vec{x},\vec{y}) = <u(\vec{x}),\vec{y}> = <\vec{x},u(\vec{y})> \end{array}$
   est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Proposition 23
Soit $\varphi \in L_{s2}(E)$ et $u \in L_s(E)$ l'endomorphisme symétrique associé.

1. *φ et u ont le même rang*
2. *φ et u ont le même noyau.*

Proposition 24
Si *$(E, <\,,\,>)$ est un espace euclidien et $\varphi \in L_{s2}(E)$ une forme bilinéaire symétrique*
Alors *il existe une base qui est orthonormée pour le produit scalaire $<\,,\,>$ et orthogonale pour φ.*

Définition 15
Soit u un endomorphisme autoadjoint de forme bilinaire symétrique associée φ_u, on dit que u est positif (respectivement défini positif) si φ_u est positive (respectivement définie positive)
On notera $L_s^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs.

Proposition 25
Soit $u \in L_s(E)$, on a :

1. *u est positif si et seulement si $\forall \vec{x} \in E,\ <u(\vec{x}),\vec{x}> \geqslant 0$*

2. *u est défini positif si et seulement si* $\forall \vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, $< u(\vec{x}), \vec{x} >> 0$

Proposition 26 *Soit* $u \in L_s(E)$,
u est positif (resp. défini positif) si et seulement si les valeurs propres de u sont positives (resp. strictement positives)

Définition 16
Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_{sn}(\mathbb{R})$ *est positive (respectivement définie positive) si ses valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives).*

Proposition 27
Soit $u \in L_s(E)$ *de matrice* M_u *dans une base orthonormée.*
u est positif (resp. défini positif) si et seulement si M_u *est positive (resp. définie positive).*

Théorème 9 $L(E)$ *est rapporté à la norme subordonnée à la norme euclidienne de* E.
Soit $u \in L_s^+(E)$

1. $\| u \| = \sup\limits_{\|\vec{x}\| \leqslant 1} < u(\vec{x}), \vec{x} >$
2. $\| u \| = r(u)$ *où* $r(u)$ *désigne la plus grande valeur propre de u.*

Conséquence :

Théorème 10 $L(E)$ *est rapporté à la norme subordonnée à la norme euclidienne de* E.
Soit $u \in L(E)$

1. $\| u \| = \sqrt{\| u^* \circ u \|}$
2. $\| u \| = \sqrt{\sup\limits_{k \in [\![1,n]\!]} \lambda_k}$ *où* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *sont les valeurs propres de* $u^* \circ u$

2.5 Endomorphismes orthogonaux

Définition 17
Soit $u \in L(E)$, *on dit que u est un endomorphisme orthogonal si* $u \circ u^* = \mathrm{I_d}$
On note $O(E)$ *l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de* E

Définition 18
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *on dit que* M *est une matrice orthogonale si* ${}^tM.M = I_n$ *où* I_n *est la matrice identité de d'ordre* n.
On note $O_n(\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre* n

Proposition 28
Soit $u \in L(E)$ *de matrice* M *dans une base orthonormée* $\mathcal{B}$, *on a :* $u \in O(E)$ *si et seulement si* $M \in O_n(\mathbb{R})$

Proposition 29
$O(E)$ *est un sous-groupe de* $(GL(E), \circ)$ *et* $O_n(\mathbb{R})$ *est un sous- groupe de* $(GL_n(\mathbb{R}, \times)$

Théorème 11 *Soit u une application de* E *dans* E
Le propositions suivantes sont équivalentes deux à deux :

1. $u \in O(E)$
2. $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $u^* \circ u = \mathrm{I_{d_E}}$
3. $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $< u(\vec{x}), u(\vec{y}) > = < \vec{x}, \vec{y} >$
4. *u est linéaire et* $\forall \vec{x} \in E$, $\| u(\vec{x}) \| = \| \vec{x} \|$
5. *L'image de* $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ *par u,* $u(\mathcal{B}) = (u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ *est une base orthonormée de* E
6. *L'image de toute base orthonormée de* E *par u est une base orhonormée de* E

Théorème 12
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ *de vecteurs colonnes* $(C_j)_{1 \leqslant j \leqslant n} \in (M_{n,1}(\mathbb{R}))^n$ *et de vecteurs lignes* $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in (M_{1,n}(\mathbb{R}))^n$, *les propositions suivantes sont équivalentes deux à deux :*

1. $M \in O_n(\mathbb{R})$
2. ${}^tM.M = I_n$
3. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, ${}^tC_iC_j = \delta_{i,j}$ *avec* $\delta_{i,j} = 1$ *si* $i = j$ *et* $\delta_{i,j} = 0$ *si* $i \neq j$.

4. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $L_i\,{}^tL_j = \delta_{i,j}$.

Définition 19 *Soit* $(E, <\,,\,>)$ *un espace euclidien*

L'application : $\begin{array}{ccc} (O(E), \circ) & \to & (\{-1,+1\}, \times) \\ u & \mapsto & \det u \end{array}$ *est un morphisme de groupe.*
On note $SO(E)$ *le noyau de ce morphisme, on appelle rotation vectorielle tout élément de* $SO(E)$.
On note $SO^-(E) = O(E) \setminus SO(E)$

Définition 20

L'application : $\begin{array}{ccc} (O_n(\mathbb{R}), \times) & \to & (\{-1,+1\}, \times) \\ M & \mapsto & \det M \end{array}$ *est un morphisme de groupe.*
On note $SO_n(\mathbb{R})$ *le noyau de ce morphisme.*
On note $SO_n^-(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$.

Proposition 30
$SO(E)$ *est un sous-groupe de* $(O(E), \circ)$ *et* $SO_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $(O_n(\mathbb{R}), \times)$.

Proposition 31
Soit $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *deux bases orthonormées de* E
Il existe un unique endomorphisme orthogonal u *de* E *tel que* $u(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$

Définition 21 *Soit* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *deux bases orthonormées de* E *et* $u \in O(E)$ *telle que* $u(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$.
On dit que $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_2$ *ont même orientation si* $u \in SO(E)$.
Orienter l'espace euclidien E *consiste à choisir une base orthonormée* $\mathcal{B}_0$ *de* E, *une base qui a même orientation que* $\mathcal{B}_0$ *est une base orthonormée directe, sinon on dit que c'est une base orthonormée indirecte.*

Définition 22
On appelle réflexion de E *une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.*

Proposition 32
Une réflexion est un élément de $SO_n^-(\mathbb{R})$

Exercice 4
Montrer les deux propositions suivantes :

1. **Proposition**
   Si $u \in O(E)$ *et* F *un sous-espace vectoriel de* E *stable par* u
   Alors $F^\perp$ *est stable par* u
2. **Proposition** *Soit* $(E, <\,,\,>)$ *un espace vectoriel euclidien de dimension* $n \geqslant 2$
   Si $u \in O(E)$
   Alors u *est produit d'au plus* n *réflexions.*