EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES

Ce document n'est pas un cours complet, il donne un aperçu rapide de quelques résultats à connaître sur les équations et systèmes différentiels linéaires scalaires (les fonctions inconnues sont des fonctions numériques de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1 Equations différentielles linéaires

Soit F un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension finie n rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.1 Equations différentielles d'ordre 1

Soit a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et $\vec{b}$ une application continue de I dans F.

Définition 1 *on appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1, une équation de la forme :*

$$(E) \begin{cases} \vec{x}\,'(t) = a(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \\ (t, \vec{x}(t)) \in I \times F \end{cases}$$

où $\vec{x}$ est une fonction inconnue de la variable réelle à valeurs dans F dérivable sur son ensemble de définition.

Remarque 1 *$a(t)\vec{x}(t)$ désigne $a(t)(\vec{x}(t))$ c'est à dire l'image du vecteur $\vec{x}(t)$ par l'application linéaire $a(t)$*

A l'équation (E) on associe l'équation différentielle :

$$(E_H) \begin{cases} \vec{x}\,'(t) = a(t)\vec{x}(t) \\ (t, x(t)) \in I \times F \end{cases}$$

Vocabulaire :

- (E_H) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à cœfficients non constants sans second membre (si a n'est pas une fonction constante), on dit aussi équation différentielle linéaire du premier ordre homogène.
- (E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à cœfficients non constants avec second membre, (E_H) est l'équation homogène associée.
- Pour $(t_0, \vec{x}_0) \in I \times F$ l'équation : $\begin{cases} \vec{x}\,' = a(t)\vec{x} + \vec{b}(t) \\ (t, \vec{x}(t)) \in I \times F \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$ est un problème de Cauchy

Définition 2 *On appelle solution de (E) tout couple (J, φ) où $J \subset I$ et φ est une fonction définie et dérivable sur J à valeurs dans F telle que $\forall t \in J,\ \varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + \vec{b}(t)$.*

Définition 3 *Une solution (J, φ) de (E) est une solution maximale si et seulement si pour toute solution (K, ψ) telle que $J \subset K$ et $\psi_{|J} = \varphi$ on a $K = J$.*

Théorème 1 *Si (J, φ) est une solution maximale de (E) alors $J = I$.*

Dans la suite on s'intéressera aux solutions maximales de (E) et on identifiera une solution maximale avec la fonction correspondante définie sur I.

Théorème 2 *Le problème de Cauchy :* $\begin{cases} \vec{x}\,' = a(t)\vec{x} + \vec{b}(t) \\ (t, \vec{x}) \in I \times F \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$ *possède une unique solution maximale.*

Théorème 3 *L'ensemble des solutions $\overrightarrow{S}$ de (E_H) est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$ espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans F.*

Théorème 4 *Pour $t_0 \in I$ l'application :* $\begin{array}{ccc} \overrightarrow{S} & \to & F \\ \varphi & \mapsto & \varphi(t_0) \end{array}$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel*

Conséquence :

Proposition 1 *Soit* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *n solutions de* (E_H) *et* $t_0 \in I$ *:*
$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *est une base de* $\vec{S}$ *si et seulement si* $(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$ *est une base de* F.

Définition 4
Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *n solutions de* (E_H)

1. *On appelle matrice wronskienne relativement à la base* $\mathcal{B}$ *de* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *l'application* M_w *de* I *dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *qui à* $t \in I$ *associe la matrice des vecteurs* $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ *dans la base* $\mathcal{B}$
2. *On appelle wronskien de* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *dans la base* $\mathcal{B}$ *l'application* $W : t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$
3. $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *est un système fondamental de solutions de* (E_H) *si* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *est une base de* $\vec{S}$.

Proposition 2 *Soit* $t_0 \in I$

1. $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *est un système fondamental de solutions si et seulement si* $W(t_0) \neq 0$.
2. $W(t_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in I, W(t) \neq 0$.

Théorème 5 *L'ensemble des solutions de* (E) *est un sous-espace affine* S *de dimension* n *du* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel des fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *à valeurs dans* F *de direction l'espace vectoriel* $\overrightarrow{S}$ *des solutions de l'équation homogène associée* (E_H).

Si $\vec{x}_0$ est une solution particulière de (E) alors $S = \vec{x}_0 + \vec{S}$

Proposition 3
Si $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *est un système fondamental de solutions de* (E_H)
Alors

- $\vec{S} = \{t \mapsto c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t),\ (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n\}$
- *L'unique solution du problème de Cauchy :* $(E_c)\begin{cases} \vec{x}'(t) = a(t).\vec{x}(t) \\ \vec{x}(t_{t_0}) = \vec{x}_0 \\ (t, \vec{x}(t)) \in I \times F \end{cases}$ *est la fonction* φ *définie sur* I *par* $\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)$ *où* $(c_1, \dots, c_n)$ *est l'unique élément de* $\mathbb{K}^n$ *tel que* $\vec{x}_0 = c_1\varphi_1(t_0) + \dots + c_n\varphi_n(t_0)$.

1.2 Systèmes différentiels

Pour $t \in I$, soit $A(t)$ la matrice de $a(t)$ dans la base $\mathcal{B}$, $B(t)$ la matrice colonne des coordonnées de $\vec{b}(t)$ dans $\mathcal{B}$

$$(\mathcal{S})\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ (t, X(t)) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

est l'équation différentielle matricielle d'ordre 1 $\mathcal{S}$ associée à (E) et

A l'équation $(\mathcal{S})$ on associe l'équation différentielle matricielle homogène d'ordre 1 :

$$(\mathcal{S}_H)\begin{cases} X' = A(t)X \\ (t, X) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$(\mathcal{S})$ et $\mathcal{S}_H$ s'écrivent sous la forme d'un système différentiel linéaire scalaire d'ordre 1 de n équations à n inconnues :

$$(\mathcal{S})\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{S}_H)\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots & \qquad \vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Les résultats précédents s'appliquent aux systèmes différentiels linéaires d'ordre 1 :

- Pour $(t_0, X_0) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ Le problème de Cauchy :
$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ (t, X(t)) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$
Possède une unique solution maximale.
- L'ensemble des solutions de $(\mathcal{S}_H)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n
- L'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ est un $\mathbb{K}$ espace affine de dimension n de direction l'espace vectoriel des solutions de $(\mathcal{S}_H)$.

On définit de même pour n solutions $(X_1, \ldots, X_n)$ de $(\mathcal{S}_H)$ la matrice wronskienne M_w de $(X_1, \ldots, X_n)$ et le wronskien $W(t) = \det M_w(t)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ ou de $\mathbb{K}^n$ (en identifiant un vecteur $\vec{x}$ de $\mathbb{K}^n$ avec le vecteur colonne X de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

Théorème 6
Si $(X_1, \cdots, X_n)$ *est un système fondamental de solution de* $(\mathcal{S}_H)$
Alors
- $\vec{S} = \{M_w C,\ C \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})\}$
- *Pour* $C_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, $t \mapsto M_w(t)M_w(t_0)^{-1}C_0$ *est l'unique solution maximale du problème de Cauchy :*
$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) \\ (t, X(t)) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X(t_0) = C_0 \qquad \text{où } C_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \end{cases}.$$

1.3 Méthode de variation des constantes

Lorsque l'on ne trouve pas de solution particulière à l'équation (E) ou au système $(\mathcal{S})$ on peut appliquer, la méthode de variation des constantes :

1.3.1 Pour une équation différentielle linéaire du premier ordre

Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ un sytème fondamental de solutions de (E_H) et $(c_1, \ldots, c_n)$ un système de n fonctions de I dans $\mathbb{K}$, posons $\varphi = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$

Proposition 4
$\varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$ *si et seulement si* $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \varphi_k \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$

Théorème 7
Soit $(E) : \begin{cases} \vec{x}' = a(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \\ (t, \vec{x}(t)) \in I \times F \end{cases}$ *et* $(E_H) : \begin{cases} \vec{x}' = a(t)\vec{x}(t) \\ (t, \vec{x}(t)) \in I \times F \end{cases}$ *avec* $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$ *et* $\vec{b} \in \mathcal{C}(I, F)$,
$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *un sytème fondamental de solutions de* (E_H)
on a :
- *Pour* $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$ *il existe un unique n-uplet de fonctions* $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})^n$ *tel que* $\varphi = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$
- (I, φ) *est solution de* (E) *si et seulement si* $\forall t \in I,\ c'_1\varphi_1(t) + \ldots + c'_n\varphi_n(t) = \vec{b}(t)$

1.3.2 Pour un système différentiel linéaire du premier ordre

Si $M_w(t)$ est la matrice wronskienne en t d'un système fondamental de solutions de $(\mathcal{S}_H)$ alors on cherche les solutions de $(\mathcal{S})$ sous la forme $X = M_w C$ où $t \mapsto C(t)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Théorème 8
X *est solution de* $(\mathcal{S})$ *si et seulement si* C *est solution de* $M_w C' = B$ *soit* $C' = M_w^{-1}B$

1.4 Equations différentielles scalaires d'ordre 2

Soit a, b, c trois fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

On considère l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 : $(E) \begin{cases} x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t) \\ (t, x) \in I \times \mathbb{K} \end{cases}$

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$

x est solution de (E) si et seulement si la fonction $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ est solution de $(\mathcal{S})$: $X' = A(t)X + B(t)$

On se ramène à un système différentiel linéaire scalaire d'ordre 1 de deux équations à deux inconnues, les résultats précédents s'appliquent.
(voir paragraphe 2.2 plus loin pour plus de détails)

2 Equations différentielles linéaires scalaires

2.1 Equation du premier ordre

Soit a et b deux fonctions numériques continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, on s'intéresse à l'équation différentielle : (E) : $y' = a(t)y + b(t)$ où y est une fonction inconnue dérivable.

2.1.1 Généralités

On applique les définitions et résultats de 1

Proposition 5 *L'ensemble des solutions $\overrightarrow{S}$ de (E_H) est un sous-espace vectoriel de dimension 1 du $\mathbb{K}$ espace vectoriel des fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Proposition 6 *Pour $t_0 \in I$ l'application* $\begin{array}{ccc} \overrightarrow{S} & \to & \mathbb{K} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(t_0) \end{array}$ *est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ espace vectoriel*

Proposition 7 *L'ensemble des solutions de (E) est un sous-espace affine S de dimension 1 du $\mathbb{K}$ espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ de direction l'espace vectoriel $\overrightarrow{S}$ des solutions de l'équation homogène associée (E_H).*

Remarque 2 *Si a, b sont de classe $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N}$ (resp. $p = +\infty$) sur I alors les solutions de (E_H) et de (E) sont de classe $\mathcal{C}^{p+1}$, (resp. $\mathcal{C}^\infty$ si $p = +\infty$)*

Proposition 8 *Le problème de Cauchy :* $\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ (t, y) \in I \times \mathbb{K} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ *possède une unique solution définie sur I.*

2.1.2 Résolution

D'une manière générale on résout d'abord l'équation homogène (E_H) et ensuite on résout l'équation (E) de la manière suivante :

2.1.3 Equation (E_H)

Proposition 9 *Si A est une primitive de a sur I alors $\overrightarrow{S} = \{\varphi,\ \forall t \in I\ \varphi(t) = ce^{A(t)},\ c \in \mathbb{K}\}$*

2.1.4 Equation (E)

méthode 1 :
Si on connait une solution y_1 de (E) (y_1 est appelée une solution particulière) alors $S = y_1 + \overrightarrow{S}$.
méthode 2 :
C'est la méthode dite de "variation de la constante". On recherche les solutions sous la forme $y = ze^{A(t)}$ où z est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. z est alors solution de l'équation : $z'e^{A(t)} = b(t)$ de sorte que si ϕ est une primitive de $b(t)e^{-A(t)}$ alors $S = \{ce^{A(t)} + \phi(t)e^{A(t)},\ c \in \mathbb{K}\} = y_1 + \overrightarrow{S}$ où $y_1(t) = \phi(t)e^{A(t)}$ est une solution particulière de (E).

2.2 Equation du second ordre

Soit a, b et c trois fonctions numériques continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, on s'intéresse à l'équation différentielle : (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ où y est une fonction inconnue deux fois dérivable.

2.2.1 Généralités

Comme précédemment on définit les solutions et les solutions maximales de (E) et on associe à (E) l'équation homogène $(E_H) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

Proposition 10 *Si (J, φ) est une solution maximale de (E) alors $J = I$.*

comme précédemment on s'intéressera aux solutions maximales de (E) et on identifiera une solution maximale avec la fonction correspondante définie sur I.

Proposition 11 *L'ensemble des solutions $\overrightarrow{S}$ de (E_H) est un sous-espace vectoriel de dimension 2 du $\mathbb{K}$ espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Proposition 12 *Pour $t_0 \in I$ l'application* $\begin{array}{ccc} \overrightarrow{S} & \rightarrow & \mathbb{K}^2 \\ \varphi & \mapsto & (\varphi(t_0), \varphi'(t_0)) \end{array}$ *est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ espace vectoriel*

Proposition 13 *L'ensemble des solutions de (E) est un sous-espace affine S de dimension 2 du $\mathbb{K}$ espace vectoriel des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ de direction l'espace vectoriel $\overrightarrow{S}$ des solutions de l'équation homogène associée (E_H).*

Remarque 3 *Si a, b, c sont de classe $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N}$ (resp. $p = +\infty$) sur I alors les solutions de (E_H) et de (E) sont de classe $\mathcal{C}^{p+2}$, (resp. $\mathcal{C}^\infty$ si $p = +\infty$)*

Ici pour $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K}^2$ l'équation : $\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ (t, y) \in I \times \mathbb{K} \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$ est un problème de Cauchy

Proposition 14 *Le problème de Cauchy :* $\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ (t, y) \in I \times \mathbb{K} \\ y(t_0) = y_0\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$ *possède une unique solution définie sur I.*

2.2.2 Résolution

D'une manière générale on résout d'abord l'équation homogène (E_H) et ensuite on résout l'équation (E)

2.2.3 Equation (E_H)

Lorsque les fonctions a, b ne sont pas constantes, il n'existe pas comme pour les équations du premier ordre de méthode générale pour déterminer $\overrightarrow{S}$. On cherche deux solutions y_1, y_2 linéairement indépendantes, pour cela on les cherche en s'inspirant des coefficients a, b et des fonctions classiques (polynômes, fonctions rationnelles, exponentielles, logarithmes, trigonométriques etc...). On peut aussi chercher les solutions sous forme de somme de série entière ou de série de fourier, par changement de variable ou de fonction inconnue on peut essayer de se ramener à une équation plus simple, du premier ordre par exemple. On sait résoudre l'équation lorsque a et b sont constantes ou lorsque l'on connait une solution qui ne s'annule pas sur I (voir les paragraphes suivants). Ne pas oublier le résultat :

Proposition 15 *Soit $t_0 \in I$ et $(y_1, y_2) \in \overrightarrow{S}^2$. (y_1, y_2) est une base de $\overrightarrow{S}$ si et seulement si $((y_1(t_0), y_1'(t_0)),\ (y_2(t_0), y_2'(t_0)))$ est une base de $\mathbb{K}^2$*

• Soit $(y_1, y_2) \in \overrightarrow{S}^2$, la matrice wronskienne de (y_1, y_2) en $t \in I$ est la matrice $M_w(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$

et le wronskien est $W(t) = \det M_w(t)$ (voir 1.4)

Proposition 16 *Soit* $(y_1,y_2) \in \overrightarrow{S}^2$, (y_1,y_2) *est une base de* $\overrightarrow{S}$ *si et seulement si* $\exists t_0 \in I$ *tel que* $W(t_0) \neq 0$ *dans ces conditions* $\forall t \in I,\ W(t) \neq 0$ *et* $M_w(t)$ *est inversible.*

Proposition 17 *Soit* (y_1,y_2) *une base de* $\overrightarrow{S}$*, on a :*
$\overrightarrow{S} = \{\lambda y_1 + \mu y_2,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\}$

2.2.4 Equation (E)

méthode 1 :
Si on connait une solution y_0 de (E) (y_0 est appelée une solution particulière) alors $S = y_0 + \overrightarrow{S}$ et si (y_1,y_2) est une base de $\overrightarrow{S}$ alors $S = \{y_0 + \lambda y_1 + \mu y_2,\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\}$.
méthode 2 :
C'est la méthode dite de "variation des constantes". On recherche les solutions sous la forme $y = \lambda y_1 + \mu y_2$ où (y_1,y_2) est une base de $\overrightarrow{S}$ et λ,μ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. y est alors solution de (E) si et seulement si (λ,μ) est solution du système : $\left\{\begin{array}{lcl} \lambda' y_1 + \mu' y_2 & = & 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' & = & c \end{array}\right.$.

2.2.5 Cas où on connait une solution qui ne s'annule pas

Si u est une solution de (E_H) qui ne s'annule pas sur I, on cherche alors les solutions de (E) sous la forme $y = zu$, y est solution de (E) sur I si et seulement si z' est solution d'une équation linéaire du premier ordre.

2.2.6 Equation homogène à coefficients constants

On s'intéresse à l'équation $(E_H) : y'' + ay' + by = 0$ avec $(a,b) \in \mathbb{K}^2$.
On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle, l'équation dans $\mathbb{C}$: $x^2 + ax + b = 0$
soit (r_1,r_2) les deux racines dans $\mathbb{C}$ de cette équation.

1. Solutions complexes :
   (a) Si $r_1 \neq r_2$ alors $\overrightarrow{S} = \{\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}$
   (b) Si $r_1 = r_2$ alors $\overrightarrow{S} = \{\lambda e^{r_1 t} + \mu t e^{r_1 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2\}$
2. Solutions réelles avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
   (a) Si $(r_1,r_2) \in \mathbb{R}^2,\ r_1 \neq r_2$ alors $\overrightarrow{S} = \{\lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$
   (b) Si $(r_1,r_2) \in \mathbb{R}^2,\ r_1 = r_2$ alors $\overrightarrow{S} = \{\lambda e^{r_1 t} + \mu t e^{r_1 t},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$
   (c) Si $(r_1,r_2) \in \mathbb{C}^2,\ r_2 = \bar{r}_1,\ r_1 = \alpha + i\beta$ alors $\overrightarrow{S} = \{\lambda e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \mu e^{\alpha t}\sin(\beta t),\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$

3 Equations différentielles à cœfficients constants

Dans ce paragraphe a est une application constante de I dans $\mathcal{L}(F)$ et on identifiera la fonction constante avec la valeur de la constante, c'est à dire un élément de $\mathcal{L}(F)$, $\vec{b}$ est une fonction continue de I dans F.

Proposition 18
Pour $a \in \mathcal{L}(F)$
- $\varphi : t \mapsto e^{ta}$ *est une application de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall t \in \mathbb{R}$; $\varphi'(t) = a \circ e^{ta} = e^{ta} \circ a$
- *Si* $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, $\quad e^{sa} \circ e^{ta} = e^{ta} \circ e^{sa} = e^{(s+t)a}$

Théorème 9
- *Le problème de Cauchy :* (E_{hc}) : $\left\{\begin{array}{l} \vec{x}\,'(t) = a\vec{x}(t) \\ (t,\vec{x}(t)) \in I \times F \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{array}\right.$ *où* $(t_0,\vec{x}_0) \in I \times F$
  possède pour unique solution maximale (I,φ) *avec* $\forall t \in I,\ \varphi(t) = e^{(t-t_0)a}\vec{x}_0$
- *L'ensemble des solutions de* (E_H) : $\left\{\begin{array}{l} \vec{x}\,' = a\vec{x} \\ (t,\vec{x}(t)) \in \mathbb{R} \times F \end{array}\right.$ *est* $\vec{S} = \{t \mapsto e^{ta}\vec{c},\ \vec{c} \in F\}$

Théorème 10

- *Le problème de Cauchy :* (E_c) : $\begin{cases} \vec{x}\,'(t) = a\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \\ (t, \vec{x}(t)) \in I \times F \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$ *où* $(t_0, \vec{x}_0) \in I \times F$

  possède pour unique solution maximale (I, φ) *avec* $\forall t \in I,\ \varphi(t) = e^{ta} \int_{t_0}^{t} e^{-sa}\vec{b}(s)\mathrm{d}s + e^{(t-t_0)a}\vec{x}_0$

- *L'ensemble des solutions de* (E) : $\begin{cases} \vec{x}\,' = a\vec{x} + \vec{b}(t) \\ (t, \vec{x}(t)) \in \mathbb{R} \times F \end{cases}$ *est* $S = \{t \mapsto e^{ta} \int_{t_0}^{t} e^{-sa}\vec{b}(s)\mathrm{d}s + e^{ta}\vec{c},\ \vec{c} \in F\}$

4 Systèmes différentiels à coefficients constants

4.1 Généralités

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$ (espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$ un vecteur de n fonctions numériques inconnues de classe $\mathcal{C}^1$.

On s'intéresse au système différentiel :

$$(E) \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{cases}$$

qui s'écrit aussi sous la forme :

$$\text{(E)}\begin{cases} X' = AX + B(t) \\ (t, X) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

et on considère le système homogène associé :

$$(E_H) \begin{cases} X' = AX \\ (t, X) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

Théorème 11 *Les solutions maximales de* (E_H) *et de* (E) *sont définies sur* I

Théorème 12 *L'ensemble des solutions* $\overrightarrow{S}$ *de* (E_H) *est un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel de dimension* n.

Proposition 19 *Pour* $t_0 \in I$ *l'application* $\begin{array}{ccc} \overrightarrow{S} & \rightarrow & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ \varphi & \rightarrow & \varphi(t_0) \end{array}$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel.*

Théorème 13 *L'ensemble des solutions* S *de* (E) *est un* $\mathbb{K}$ *espace affine de dimension* n *de direction l'espace vectoriel des solutions de* (E_H).

Proposition 20
Pour $(t_0, C_0) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

Le problème de Cauchy : $\begin{cases} X' = AX + B(t) \\ (t, X) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X(t_0) = C_0 \end{cases}$ *possède une unique solution* φ *définie sur* I .

On a

$$\forall t \in I,\ \varphi(t) = e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)\mathrm{d}s + e^{(t-t_0)A}C_0$$

- Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ n solutions de (E_H) et X_0 une solution particulière de (E).
- Soit M_w la matrice wronskienne de $(X_1, \cdots, X_n)$ n et $W(t)$ le wronskien associé.

Proposition 21 *Le système de solutions $(X_1, \cdots, X_n)$ de (E_H) est une base de $\overrightarrow{S}$ si et seulement si $\exists t_0 \in I,\ W(t_0) \neq 0$, on a alors $\forall t \in I,\ W(t) \neq 0$*

Proposition 22
L'ensemble des solutions de (E) est un espace affine de dimension n de direction $\overrightarrow{S}$ et on a $S = X_0 + \overrightarrow{S}$.

Proposition 23
Si T est semblable à A avec $T = P^{-1}AP$, P étant la matrice de changement de base, posons $X = PY$ et $B = PB_1$, on a X est solution de (E) si et seulement si Y est solution de $\begin{cases} Y' = TY + B_1(t) \\ (t, Y) \in I \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \end{cases}$

Ceci permet de résoudre aisément le système lorsque A est diagonalisable ou trigonalisable c'est à dire lorsque T est diagonale ou triangulaire.

4.2 résolution

4.2.1 Cas ou A est diagonalisable

Théorème 14
Si A est diagonalisable et $(V_1, \cdots, V_n)$ est une base de vecteurs propres avec $AV_j = \lambda_j V_j$, posons alors $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} V_j$ pour $j = 1, \cdots, n$, on a $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base de $\overrightarrow{S}$, soit $\overrightarrow{S} = \{\varphi,\ \varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_j \varphi_j(t),\ (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{K}^n\}$

4.2.2 Cas ou A est trigonalisable

Par changement de variable on se ramène à un système triangulaire de la forme :

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}x_1 + \cdots\cdots\cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ x_2' &= a_{22}x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}x_n + b_2(t) \\ \vdots & \\ x_{n-1}' &= a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n + b_{n-1}(t) \\ x_n' &= a_{nn}x_n + b_n(t) \end{cases}$$

Le système se résout de proche en proche en commençant par la dernière équation et en reportant la solution dans l'avant dernière équation ainsi de suite, on est amené à résoudre une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre avec second membre à chaque étape.