Equations différentielles non linéaires

Ce document n'est pas un cours complet, il donne quelques résultats sur les équations et systèmes différentiels scalaires du premier ordre, les fonctions inconnues sont des fonctions numériques de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1 Equation différentielle non linéaire scalaire

1.1 Equation normalisée

Définition 1 *Soit $U \subset \mathbb{R}^2$, U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si pour tout (x, y) appartenant à U il existe un rectangle $]a, b[\times]c, d[\subset U$ tel que $(x, y) \in]a, b[\times]c, d[$*

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$ continue sur U, on considère l'équation différentielle normalisée :(E_n) : $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ (t,x) \in U \end{cases}$

Définition 2 *On appelle solution de (E_n) tout couple (J, φ), avec J intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall t \in J,\ (t, \varphi(t)) \in U$ et $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$*

Remarque 1 *Si f est de classe $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N}$ (resp. $p = +\infty$) et (J, φ) est une solution de (E_n) alors φ est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$)*

Définition 3 *On dit qu'une solution (J, φ) de (E_n) est une solution maximale si pour toute solution (K, ψ) de (E_n) telle que $J \subset K$ et $\psi_{|J} = \varphi$ alors $K = J$*

Définition 4 *On appelle problème de Cauchy, une équation différentielle normalisée avec une condition initiale du type : (E_{0n}) : $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \quad \text{avec } (t_0, x_0) \in U \\ (t,x) \in U \end{cases}$*

Théorème 1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)
On considère le problème de Cauchy :

$$(E_{0n}) \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \quad \text{avec } (t_0, x_0) \in U \text{ et } f : U \to \mathbb{R} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U. \\ (t,x) \in U \end{cases}$$

Alors *il existe une unique solution maximale (I, φ) de l'équation (E_{n0}) et l'intervalle I est un intervalle ouvert.*

Conséquence :

Proposition 1

Si *(I_1, φ_1) et (I_2, φ_2) sont deux solutions maximales de $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ (t,x) \in U \end{cases}$ et il existe $t_0 \in I_1 \cap I_2,\ \varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$*
Alors $(I_1, \varphi_1) = (I_2, \varphi_2)$

Proposition 2
Si

- *(I, φ) est une solution de : $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ (t,x) \in U \end{cases}$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$*
- *On suppose que a est une extrémité de I telle que $\lim\limits_{t \to a} \varphi(t) = b$ avec $(a, b) \in U$*

Alors *(I, φ) n'est pas une solution maximale.*

1.2 Equations différentielles à variables séparables

1.2.1 Cas général

On s'intéresse à l'équation différentielle normalisée :

$$(E)\begin{cases} x' = f(t)g(x) \\ (t,x) \in A \times B \end{cases}$$

Où A et B sont deux intervalles ouvert de $\mathbb{R}$, f (respectivement g) est une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A (respectivement B) à valeurs dans $\mathbb{R}$.
(E) est une équation à variables séparables.
Le théorème de Cauchy Lipschitz s'applique et $\forall (t_0, x_0) \in A \times B$ le problème de Cauchy :

$$(E_c)\begin{cases} x^{'} = f(t)g(x) \\ (t,x) \in A \times B \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possède une unique solution maximale(I, φ)

Résolution

- Si $g(x_0) = 0$ alors (A, x_0) est solution de (E_c) (où x_0 désigne aussi la fonction constante $t \mapsto x_0$)
  L'unicité de la solution maximale de (E_c) donne $I = A$ et $\forall t \in A$, $\varphi(t) = x_0$
- Si $g(x_0) \neq 0$ alors $\forall t \in I$, $g(\varphi(t)) \neq 0$, supposons que $\forall x \in B$, $g(x) \neq 0$ (sinon on restreint l'intervalle B), soit G une primitive de $\dfrac{1}{g}$ sur B et F une primitive de f sur A.
  Il existe une constante $C \in \mathbb{R}$, $(C = G(x_0) - F(t_0))$ telle que $\forall t \in I,\ G(\varphi(t)) = F(t) + C$, G est une bijection de B sur $G(B)$ et $\forall t \in I,\ \varphi(t) = G^{-1}(F(t) + C)$

De manière pratique : Si g ne s'annule pas sur B, l'équation est équivalente à :

$$(E_c)\begin{cases} \dfrac{x^{'}}{g(x)} = f(t) \\ (t,x) \in A \times B \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Soit : φ est définie implicitement par la relation : $\quad G(x) = F(t) + C \quad$ avec $C = G(x_0) - F(t_0)$
(c'est à dire : $\forall t \in I,\ G(\varphi(t)) = F(t) + C$)
(on peut voir aussi : 5.2)

1.2.2 Equation autonome

On appelle équation scalaire autonome une équation de la forme :

$$\begin{cases} x' = g(x) \\ (t,x) \in \mathbb{R} \times B \end{cases}$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle B à valeurs dans $\mathbb{R}$.
C'est un cas particulier des équations scalaires à variables séparables, dans ce cas : $A = \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 1$
La solution maximale (I, φ) du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = g(x) \\ (t,x) \in \mathbb{R} \times B \\ x(_0) = x_0 \qquad \text{où} \quad (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times B \end{cases}$$

vérifie :

- Si $g(x_0) = 0$ alors $(I, \varphi) = (\mathbb{R}, x_0)$
- Si $g(x_0) \neq 0$ et $\forall x \in B,\ g(x) \neq 0$ alors $\forall t \in I,\ G(\varphi(t)) = t + C$ avec $C = g(x_0) - t_0$,
  (I, φ) est définie implicitement par la relation : $G(x) = t + C,\ (t,x) \in \mathbb{R} \times B$, G est une primitive de $\dfrac{1}{g}$ sur B.

On a aussi :

Théorème 2
Si (I, φ) *est une solution maximale de*

$$\begin{cases} x' = g(x) \\ (t, x) \in \mathbb{R} \times B \end{cases}$$

avec g *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur un intervalle ouvert* B *à valeurs dans* $\mathbb{R}$
Alors

1. I *est un intervalle ouvert*
2. *Pour tout réel* τ, $(\tau + I, \varphi_\tau)$ *est une solution maximale, où* $\forall t \in \tau + I,\ \varphi_\tau(t) = \varphi(t - \tau)$.
3. *Si* φ *n'est pas injective alors* $I = \mathbb{R}$ *et* φ *est périodique. Plus précisément si* $\varphi(b) = \varphi(a)$ *avec* $a < b$ *alors* $b - a$ *est une période de* φ.
4. *Si* (J, ψ) *est une autre solution maximale telle qu'il existe* $(t_0, t_1) \in I \times J$ *telle que* $\varphi(t_0) = \psi(t_1)$ *alors* $\exists \tau \in \mathbb{R},\ J = \tau + I,\ \psi = \varphi_\tau$

2 Systèmes autonomes

2.1 Systèmes autonomes

On s'intéresse dans ce paragraphe aux systèmes différentiels autonomes dans $\mathbb{R}^2$, soit aux systèmes différentiels de la forme :

$$(S) \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \\ (t, (x, y)) \in \mathbb{R} \times U \end{cases}$$

avec U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f et g sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$
(S) s'écrit aussi :

$$(S) \begin{cases} X' = F(t, X) \\ (t, X) \in \mathbb{R} \times U \end{cases}$$

avec $X = (x, y),\ F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)),\ F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
(U, F) est un champ de vecteurs., les solutions de S sont des arcs paramétrés appelés aussi courbes intégrales du champ de vecteur (U, F), le support d'une courbe intégrale (I, φ) (c'est à dire l'ensemble $\{\varphi(t),\ t \in I\}$) est aussi appelé une orbite de S.

Pour $(t_0, X_0) \in I \times U$

$$(S_c) \begin{cases} X' = F(t, X) \\ (t, X) \in \mathbb{R} \times U \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

est un problème de Cauchy.

Définition 5
On appelle solution de (S) *un couple* (I, φ), $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ *où* I *est intervalle de* $\mathbb{R}$, φ_1, φ_2 *sont de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telles que :* $\forall t \in I, \begin{cases} \varphi_1'(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ \varphi_2'(t) = g(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in U) \end{cases}$

Remarque 2
Une solution est un arc paramétré (voir 4)

Définition 6
On appelle solution maximale de (S) *une solution* (I, φ) *de* (S), *avec* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, *telle que si* (J, ψ) *est une solution qui vérifie* $I \subset J$ *et* $\psi_I = \varphi$ *alors* $J = I$.

Théorème 3
Si

$$(S_c)\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \\ (t,(x,y)) \in \mathbb{R}\times U \\ (x(t_0),y(t_0)) = (x_0,y_0) \end{cases}$$

est un problème de Cauchy avec
U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \mapsto \mathbb{R}$ et $g : U \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $(t_0,(x_0,y_0)) \in \mathbb{R}\times U$
Alors
S_c possède une unique solution maximale.

Théorème 4
Si *(I,φ) est une solution maximale du système différentiel autonome*

$$(S)\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \\ (t,(x,y)) \in \mathbb{R}\times U \end{cases}$$

avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \mapsto \mathbb{R}$ et $g : U \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U
Alors

1. *I est ouvert*
2. *Pour $\tau \in \mathbb{R}$, (I_τ,φ_τ), avec $I_\tau = \tau + I, \forall t \in I_\tau\ \varphi_\tau(t) = \varphi(t-\tau)$, est aussi une solution maximale de (S)*
3. *Si φ n'est pas injective avec $\varphi(a) = \varphi(b)$ $((a,b) \in I^2, a < b)$ alors $I = \mathbb{R}$, φ est périodique et $b-a$ est une période de φ.*
4. *Si (J,ψ) est une solution maximale de (S) telle que les orbites de (J,ψ) et (I,φ) ont au moins un point commun alors il existe $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $J = \tau + I$ et $\psi = \varphi_\tau$*
5. *Si a est une borne de I et $\lim_{t\to a}\varphi(t) = b$ alors $(a,b) \notin \mathbb{R}\times U$*

2.2 Equations différentielles scalaires de second ordre autonomes

On s'intéresse dans ce paragraphe aux équations différentielles scalaires de la forme :

$$(E)\begin{cases} x" = f(x,x') \\ (t,(x,x')) \in \mathbb{R}\times U \end{cases}$$

avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$

- une solution de (E) est un couple (I,φ) avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall t \in I,\ (\varphi(t),\varphi'(t)) \in U$ et $\varphi"(t) = f(\varphi(t),\varphi'(t))$
- Une solution maximale est une solution (I,φ) de (E) qui n'admet pas de prolongement strict.

A (E) on associe le système autonome :

$$(S)\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x,y) \\ (t,(x,y)) \in \mathbb{R}\times U \end{cases}$$

Résoudre (E) est équivalent à résoudre S
En particulier tout problème de Cauchy

$$(E)\begin{cases} x" = f(x,x') \\ (t,(x,x')) \in \mathbb{R}\times U \\ (x(t_0),x'(t_0)) = (x_0,y_0) \qquad \text{où } (t_0,(x_0,y_0)) \in \mathbb{R}\times U \end{cases}$$

possède une unique solution maximale.

Compléments sur les équations différentielles

3 Equation non normalisée

Définition 7 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ si pour tout (x,y,z) appartenant à Ω il existe un rectangle $]a,b[\times]c,d[\times]e,f[\subset \Omega$ tel que $(x,y,z)\in]a,b[\times]c,d[\times]e,f[$*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ et F une application de Ω dans $\mathbb{R}$ continue sur Ω, on considère l'équation différentielle non normalisée : (E) $\begin{cases} F(t,x,x')=0 \\ (t,x,x')\in\Omega \end{cases}$

On définit comme précédemment les solutions et les solutions maximales de (E).
Le théorème suivant permet de normaliser l'équation différentielle localement et d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 5 *On considère l'équation différentielle :*
$(E_0)\begin{cases} F(t,x,x')=0 \\ (t,x,x')\in\Omega \end{cases}$
Si
- *F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$*
- *$F(t_0,x_0,y_0)=0$ avec $(t_0,x_0,y_0)\in\Omega$*
- $\dfrac{\partial F}{\partial z}(t_0,x_0,y_0)\neq 0$

Alors
Il existe une solution (I,x) avec I ouvert et $t_0\in I$ telle que : $\forall t\in I,\ (t,x(t),x'(t))\in\Omega,\ F(t,x(t),x'(t))=0$ et $x(t_0)=x_0,\ x'(t_0)=y_0$

Solutions singulières

On considère l'équation non normalisée : (E) $\begin{cases} F(t,x,x')=0 \\ (t,x,x')\in\Omega \end{cases}$ avec F de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω

Définition 8 *Une solution (I,x) est une solution singulière de (E) si $\forall t\in I$ $\begin{cases} F(t,x(t),x'(t)) &= 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(t,x(t),x'(t)) &= 0 \end{cases}$*

Remarque 3 *C'est une définition, il en existe d'autres qui ne sont pas équivalentes*

La plupart du temps la résolution d'une équation différentielle conduit à une solution générale (x_λ) qui dépend d'un paramètre λ (pour les équations du premier ordre) pour lesquelles $F(t,x_\lambda(t),x'_\lambda(t))=0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial z}(t,x_\lambda(t),x'_\lambda(t))\neq 0$ et d'une ou plusieurs solutions singulières, comme par exemple dans les équations de Clairaut, (voir plus loin).
(note : il peut y avoir plusieurs paramètres notamment dans le cas de recollement des solutions :
exemple :$xy'-2y=0$, les solutions sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=C_1x^2\chi_{]-\infty,0]}(x)+C_2x^2\chi_{[0,+\infty[}(x)$, $(C_1,C_2)\in\mathbb{R}^2$ avec χ_I est la fonction caractéristique de I)

4 Courbes paramétrées et équations différentielles

4.1 Arcs paramétrés

Dans cette section il s'agit juste de donner quelques notions de base sur les arcs et les courbes paramétrées du plan.

4.1.1 Définitions

Soit E un plan affine, on identifiera E à $\mathbb{R}^2$

Définition 9 *On appelle arc paramétré de classe $\mathcal{C}^p$, $p\in\mathbb{N}$ ou $p=+\infty$ tout couple $(\gamma)=(I,\varphi)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^p$*

On appelle support (γ^*) de l'arc paramétré $(\gamma) = (I, \varphi)$ l'image dans E de l'application φ, $(\gamma^*) = \varphi(I)$. D'une manière générale on appelle courbe paramétrée la réunion des supports d'un ou plusieurs arcs paramétrés dont les intervalles de définition sont disjoints.

Définition 10 *Deux arcs paramétrées* $(\gamma_1) = (I_1, \varphi_1)$ *et* $\gamma_2 = (I_2, \varphi_2)$ *de classe* $\mathcal{C}^p$ *sont* $\mathcal{C}^p$ *équivalents s'il existe un* $\mathcal{C}^p$ *difféomorphisme* $\theta : \begin{array}{ccc} I_1 & \to & I_2 \\ t & \to & \theta(t) \end{array}$ *de* I_1 *sur* I_2 *tel que* $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \theta$.
On dit que t *et* θ *sont des paramètres admissibles de la courbe paramétrée.*

Rappel :
soit $\varphi : \begin{array}{ccc} I_1 & \to & I_2 \\ t & \mapsto & \varphi(t) \end{array}$ une application de classe $\mathcal{C}^p$ d'un intervalle I sur un intervalle J avec $p \geq 1$.
φ est un $\mathcal{C}^p$ difféomorphisme si et seulement si

- $\varphi(I) = J$
- $\forall t \in I, \varphi'(t) \neq 0$

Définition 11 *Soit* $(\gamma) = (I, \varphi)$ *un arc paramétré, on dit que le paramétrage est un paramétrage cartésien ou que le paramètre est un paramètre cartésien si le paramètre est l'une des coordonnées du point courant c'est à dire que* $\varphi : \begin{array}{ccc} I & \to & E \\ t & \mapsto & (t, y(t)) \end{array}$ *ou* $\varphi : \begin{array}{ccc} I & \to & E \\ t & \mapsto & (x(t), t) \end{array}$

Définition 12 *Soit* $(\gamma) = (I, \varphi)$ *un arc paramétré de classe* $\mathcal{C}^p$

- (γ) *est un arc régulier Si* $p \geq 1$ *et* $\forall t \in I,\ \varphi'(t) \neq 0$
- (γ) *est un arc birégulier Si* $p \geq 2$ *et* $\forall t \in I,\ (\varphi'(t), \varphi''(t))$ *est libre.*

4.1.2 tangente et concavité

Soit (γ) un arc de classe $\mathcal{C}^1$, si $\varphi'(t) \neq 0$ alors $\varphi'(t)$ est un vecteur directeur de la tangente au support de l'arc.
Soit (γ) un arc de classe $\mathcal{C}^1$, si $\varphi'(t) = 0$ alors on dit que le point $M(t) = \varphi(t)$ est un point stationnaire de l'arc .

Soit (γ) un arc de classe $\mathcal{C}^2$, si $(\varphi'(t), \varphi''(t))$ est libre alors $\varphi'(t)$ est un vecteur directeur de la tangente au support de l'arc et $\varphi''(t)$ est dirigé dans le sens de la concavité de la courbe.
Soit (γ) un arc de classe $\mathcal{C}^2$, si $(\varphi'(t), \varphi''(t))$ est lié on dit que le point $M(t) = \varphi(t)$ est un point d'inflexion analytique de la courbe

4.1.3 Courbes intégrales d'une équation différentielle

Soit $\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ (x, y, y') \in \Omega \end{cases}$ Une équation différentielle avec Ω ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

Une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ (γ) est une courbe intégrale de (E) si (γ) admet une paramétrisation cartésienne (I, y) qui est une solution de l'équation.

Proposition 3 *Une courbe paramétrée* (γ) *de classe* $\mathcal{C}^1$ *qui admet une paramétrisation* (I, φ) *avec* $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ *est une courbe intégrale de l'équation différentielle :* $\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ (x, y, y') \in \Omega \end{cases}$ *si et seulement si* $\forall t \in I,\ x'(t) \neq 0$ *et* $F(x(t), y(t), \dfrac{y'(t)}{x'(t)}) = 0$

4.2 Enveloppes

On suppose que les courbes et les fonctions considérées sont ont moins de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 13 *Soit* $\Phi(x, y, \lambda) = 0$ *une équation d'une famille de courbes* (Γ_λ), λ *étant un paramètre variant dans un intervalle.*
Une courbe (γ) *est une enveloppe de* (Γ_λ) *si pour tout point* M *de* (γ) *il existe une valeur du paramètre* λ *telle que* $M \in (\Gamma_\lambda)$ *avec* (γ) *et* (Γ_λ) *ont même tangente en* M.

Si (I, y_λ) est un paramétrage cartésien de (Γ_λ) et (I, y) un paramétrage cartésien de (γ), (γ) est une enveloppe de (Γ_λ) si et seulement si $\forall x \in I,\ \exists \lambda$ tel que $\left\{\begin{array}{rcl} y(x) & = & y_\lambda(x) \\ y'(x) & = & y'_\lambda(x) \end{array}\right.$ Pour déterminer l'enveloppe d'une famille de courbes d'équation : $\Phi(x, y, \lambda) = 0$, il convient d'éliminer λ dans le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} \Phi(x, y, \lambda) & = & 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) & = & 0 \end{array}\right.$

Puis de vérifier que la courbe obtenue est une enveloppe.

4.3 Equation différentielle d'une famille de courbes

On considère une famille de courbes d'équation : $\Phi(x, y, \lambda) = 0$.
Pour déterminer une équation différentielle dont les courbes de la famille sont des courbes intégrales il convient d'éliminer λ dans le système : (S) : $\left\{\begin{array}{rcl} \Phi(x, y(x), \lambda) & = & 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y(x), \lambda) & = & 0 \end{array}\right.$

Exemple 1 *On considère la famille de paraboles d'équation : $y = Cx^2,\ C \in \mathbb{R}$.*
$\Phi(x, y, C) = y - Cx^2$
(S) : $\left\{\begin{array}{rcl} y - Cx^2 & = & 0 \\ y' - 2Cx & = & 0 \end{array}\right.$ *D'où les paraboles sont des courbes intégrales de l'équation différentielle : $2y - xy' = 0$.*

En général l'équation différentielle obtenue admet pour courbes intégrales les courbes de la famille mais admet aussi d'autres solutions, parfois il s'agit de l'enveloppe de la famille de courbes comme dans le cas des équations de Clairaut (voir plus loin dans les exemples d'équations différentielles non linéaires).

4.4 Trajectoires orthogonales

Définition 14 *Soit (C_λ) une famille de courbes de classe $\mathcal{C}^1$ d'équation : $f(x, y, \lambda) = 0$.*
Les trajectoires orthogonales des courbes $(C\lambda)$ sont les courbes qui rencontrent les courbes $(C\lambda)$ sous un angle droit, c'est à dire que les tangentes en un point d'intersection sont perpendiculaires.

Si la famille (C_λ) est la solution générale de l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$, les trajectoires orthogonales sont les courbes intégrales de l'équation : $F(x, y, -\dfrac{1}{y'}) = 0$.

Exemple 2 *Les trajectoires orthogonales de la famille de paraboles d'équation : $y = Cx^2$, sont les solutions de l'équation différentielle :*
$2y + \dfrac{x}{y'} = 0$
$2yy' + x = 0$
$y^2 + \dfrac{x^2}{2} = C$ *ce sont des ellipses centrées en O.*

5 Exemples d'équations différentielles non linéaires

5.1 Différentielles exactes

Type : $\begin{cases} P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \\ (x,y) \in \Omega \text{ où } \Omega \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^2 \end{cases}$

On suppose qu'il existe f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω telle que : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$.

- Les courbes intégrales ont pour équation : $f(x,y) = C$ où $C \in f(\Omega)$.
- Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions $x \mapsto y(x)$ définies imlicitement par $f(x,y) = C$.

5.2 Variables séparables

Type : y'f(y)=g(x) avec f et g continues.

Soit F et G des primitives de f et g respectivement, on se ramène au paragraphe précédent avec $P(x,y) = g(x)$, $Q(x,y) = -f(y)$ et $f(x,y) = F(y) - G(x)$.

- Les courbes intégrales ont pour équation : $F(y) - G(x) = C$ où $C \in \mathbb{R}$. (voir aussi 1.2)

5.3 Equations homogènes

Type : $y' = f(\dfrac{y}{x})$ où f est continue pour $x \in]0, +\infty[$ où $x \in]-\infty, 0[$.

1. On cherche les solutions linéaires : $y = tx$ avec t solution de l'équation $f(t) = t$.
2. On cherche les solutions non-linéaires : pour t variant dans un intervalle où $f(t) \neq t$ on pose $y = tx$ puis on a :

   * $\dfrac{\mathtt{d}y}{\mathtt{d}t} = x + t\dfrac{\mathtt{d}x}{\mathtt{d}t}$
   * $\dfrac{\mathtt{d}y}{\mathtt{d}t} = \dfrac{\mathtt{d}y}{\mathtt{d}x} \cdot \dfrac{\mathtt{d}x}{\mathtt{d}t}$

De sorte que $t \mapsto x(t)$ est alors solution de l'équation linéaire du premier ordre : $\dfrac{\mathtt{d}x}{\mathtt{d}t} = \dfrac{1}{f(t) - t} \cdot x$.

5.4 Equation de Bernouilli

Type : $y' = a(x)y + b(x)y^n$, $n \in \mathbb{N}$ où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I.

- En tout point de $I \times \mathbb{R}$ il passe une unique solution maximale.
- $y = 0$ est une solution de l'équation.
- Recherche des solutions qui ne s'annulent pas :
  On pose : $u = \dfrac{1}{y^{n-1}}$, on se ramène alors à une équation linéaire du premier ordre.

Remarque 4 *Pour $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, le changement de variable $u = \dfrac{1}{y^{\alpha-1}}$ fonctionne encore, faire attention car dans le cas général il s'agit d'avoir $y > 0$.*

5.5 Equation de Riccati

Type : $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ où a, b et c sont des fonctions continues sur un intervalle I

1. On cherche une solution particulière y_1
2. On pose $y = y_1 + z$, z est alors solution d'une équation de Bernouilli.

5.6 Equation de Clairaut

Type : $y = xy' + f(y')$ avec f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I et $f''(x) \neq 0$ sur I.

1. La **solution générale** est constituée des fonctions affines : $y = tx + f(t)$ avec t constante, les courbes intégrales forment une famille de droites.
2. L'équation admet pour **solution singulière** la courbe de paramétrisation, $\begin{cases} x &= -f'(t) \\ y &= -tf'(t) + f(t) \end{cases}$

Comme $f''(t) \neq 0$, x est un paramètre admissible de la courbe et la fonction correspondante est une solution singulière de l'équation différentielle ; c'est aussi l'enveloppe de la solution générale.

5.7 Equation de Lagrange

Type : $y = xf(y') + g(y')$ avec f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et il n'existe pas d'intervalle $J \subset I$ tel que $f(t) = t$, $\forall t \in J$.

1. On détermine les fonctions affines solutions de l'équation.
2. On cherche les solutions deux fois dérivables dont la dérivée seconde ne s'annule pas. $u = y'$ est alors un paramètre admissible des courbes intégrales.
   $\begin{cases} y(u) = x(u)f(u) + g(u) \\ \dfrac{\mathtt{d}y}{\mathtt{d}u} = u\dfrac{\mathtt{d}x}{\mathtt{d}u} \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \dfrac{\mathtt{d}y}{\mathtt{d}u} = x(u)f'(u) + \dfrac{\mathtt{d}x}{\mathtt{d}u}f(u) + g'(u) \\ \dfrac{\mathtt{d}y}{\mathtt{d}u} = u\dfrac{\mathtt{d}x}{\mathtt{d}u} \end{cases}$ x est alors solution de l'équation linéaire : $(u - f(u))\dfrac{\mathtt{d}x}{\mathtt{d}u} = xf'(u) + g'(u)$ (*). Réciproquement on vérifie que si x est solution de (*) : $\begin{cases} x = x(u) \\ y = x(u)f(u) + g(u) \end{cases}$ est la paramétrisation d'une courbe intégrale.
3. Solutions singulières : Ce sont les fonctions affines $x \mapsto mx + g(m)$ où
   $\begin{cases} f(m) = m \\ f'(m) = 0 \; et \; g'(m) = 0 \end{cases}$, l'existence de telles solutions est exceptionnelle.

5.8 Equation d'euler

Type : $x^2y'' + axy' + by = 0$ avec a et b deux constantes réelles.

- La fonction nulle est solution et si $x \mapsto y(x)$ est solution alors $x \mapsto y(-x)$ est aussi solution. De sorte que l'on peut supposer $x \in]0, +\infty[$.
- on pose $t = ln(x)$, $z(t) = y(e^t)$, d'où $y(x) = z(\ln(x))$. On se ramène alors à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants d'inconnue z.