Courbes

Quelques éléments sur les courbes :

Soit E le plan affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et de direction $\vec{E}$. E et $\vec{E}$ seront identifiés tous les deux à $\mathbb{R}^2$.

Il s'agit juste de donner quelques notions de base sur les arcs et les courbes paramétrées du plan, la plupart des définitions restent valables pour l'espace ou un espace affine quelconque de dimension n.

1 Définitions

Définition 1 *On appelle arc paramétré de classe $\mathcal{C}^p$, $p \in \mathbb{N}$ ou $p = +\infty$ tout couple $(\gamma) = (I, \varphi)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ est une application de classe $\mathcal{C}^p$ sur I à valeurs dans E.*

On appelle support (γ^*) de l'arc paramétré $(\gamma) = (I, \varphi)$ l'image dans E de l'application φ, $(\gamma^*) = \varphi(I)$. D'une manière générale on appelle courbe paramétrée la réunion des supports d'un ou plusieurs arcs paramétrés dont les intervalles de définition sont disjoints.

Définition 2 *Deux arcs paramétrés $(\gamma_1) = (I_1, \varphi_1)$ et $\gamma_2 = (I_2, \varphi_2)$ de classe $\mathcal{C}^p$ sont $\mathcal{C}^p$ équivalents s'il existe un $\mathcal{C}^p$ difféomorphisme $\theta : \begin{array}{ccc} I_1 & \to & I_2 \\ t & \to & \theta(t) \end{array}$ de I_1 sur I_2 tel que $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \theta$.*

On dit que (I_1, φ_1) et t et (I_2, φ_2) sont des paramétrages admissibles de l'arc on dit aussi que t et θ sont des paramètres admissibles.

Les arcs paramétrés $\mathcal{C}^p$ équivalents définissent un arc géométrique de classe $\mathcal{C}^p$.

Rappel :

soit $\varphi : \begin{array}{ccc} I_1 & \to & I_2 \\ t & \mapsto & \varphi(t) \end{array}$ une application de classe $\mathcal{C}^p$ d'un intervalle I sur un intervalle J avec $p \geq 1$.

φ est un $\mathcal{C}^p$ difféomorphisme si et seulement si
- $\varphi(I) = J$
- $\forall t \in I, \varphi'(t) \neq 0$

Définition 3 *Soit $(\gamma) = (I, \varphi)$ un arc paramétré, on dit que le paramétrage est un paramétrage cartésien ou que le paramètre est un paramètre cartésien si le paramètre est l'une des coordonnées du point courant c'est à dire que*

$\varphi : \begin{array}{ccc} I & \to & E \\ t & \mapsto & (t, y(t)) \end{array}$ *ou* $\varphi : \begin{array}{ccc} I & \to & E \\ t & \mapsto & (x(t), t) \end{array}$

Définition 4 *Soit $(\gamma) = (I, \varphi)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$*
- *Pour $t \in I$, $M_t = \varphi(t)$ est un point régulier si $\varphi'(t) \neq 0$*
- *Pour $t \in I$, $M_t = \varphi(t)$ est un point birégulier Si $p \geq 2$ et $(\varphi'(t), \varphi''(t))$ est libre.*

Pour un point régulier $\varphi'(t)$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe.
Pour un point birégulier $\varphi''(t)$ est dirigé dans le sens de la concavité de la courbe.

Définition 5 *Soit $(\gamma) = (I, \varphi)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^p$*
- *(γ) est un arc régulier Si $p \geq 1$ et $\forall t \in I$, $\varphi'(t) \neq 0$*
- *(γ) est un arc birégulier Si $p \geq 2$ et $\forall t \in I$, $(\varphi'(t), \varphi''(t))$ est libre.*

Dans la suite on supposera p suffisamment grand (en général $p \geq 2$)

Définition 6 *Soit $\gamma = (I, \varphi)$ un arc paramétré et $M \in \gamma^*$.*
M est un point simple si $\mathrm{Card}(\varphi^{-1}(M)) = 1$
M est un point double si $\mathrm{Card}(\varphi^{-1}(M)) = 2$
M est un point multiple si $\mathrm{Card}(\varphi^{-1}(M)) \geq 2$ et si $p = \mathrm{Card}(\varphi^{-1}(M))$, p est l'ordre de multiplicité de M.
$\gamma = (I, \varphi)$ est un arc simple si φ est injective.
$\gamma = (I, \varphi)$ est un arc paramétré compact si $I = [a, b]$.
$\gamma = (I, \varphi)$ est un lacet ou un arc fermé si $I = [a, b]$ et $\varphi(a) = \varphi(b)$.
$\gamma = (I, \varphi)$ est un arc fermé simple si γ est un lacet, $I = [a, b]$ et $\varphi_{[a,b[}$ est injective.

Ces définitions ne dépendent pas de la paramétrisation choisie.

Définition 7 *Deux arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, $\mathcal{C}^k$ équivalents, $(\gamma_1) = (I_1, \varphi_1)$ et $(\gamma_2) = (I_2, \varphi_2)$ ont même orientation s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme θ de I_1 sur I_2 strictement croissant tel que $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \theta$*

Les arcs paramétrés qui ont même orientation définissent un arc géométrique orienté. Orienter un arc géométrique de classe $\mathcal{C}^k$ consiste à choisir une paramétrisation positive (I, φ), on dit que l'on a orienté l'arc suivant les φ croissants.
D'une manière générale un arc géométrique de classe $\mathcal{C}^k$ possède une ou deux orientations, lorsqu'il admet deux orientations on dit qu'il est orientable. Plus précisément :

Proposition 1 *Un arc géométrique de classe $\mathcal{C}^k$ est non-orientable s'il existe une paramétrisation (I, φ) et un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme décroissant θ de I sur I tel que $\varphi = \varphi \circ \theta$*

Exemple 1 $\gamma = ([-\pi, \pi], \varphi)$ *avec* $\varphi(t) = (\cos t, 0)$ *est un arc non-orientable* ($\varphi(t) = \varphi \circ \theta(t)$ *avec* $\theta(t) = -t$*).*

Proposition 2 *Tout arc simple et tout arc fermé simple de classe $\mathcal{C}^k$ est orientable.*

2 Tangente et concavité

Soit $(\gamma) = (I, f)$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$, si $f'(t) \neq 0$ alors $f'(t)$ est un vecteur directeur de la tangente au support de l'arc.

Si $I = [a, b]$ et f admet une dérivée à droite en a (resp. une dérivée à gauche en b), la courbe admet une demi-tangente au point $M_a = f(a)$ (resp. $M_b = f(b)$) de vecteur directeur $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(b)$).

La droite perpendiculaire à la tangente en $f(t)$ est appelée la normale à la courbe en $f(t)$

Soit $(\gamma) = (I, f)$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$, si $f'(t) = 0$ alors on dit que le point $M(t) = f(t)$ est un point stationnaire (on dit aussi un point singulier) de l'arc .

Soit $(\gamma) = (I, f)$ un arc de classe $\mathcal{C}^2$, si $(f'(t), f''(t))$ est libre alors $f'(t)$ est un vecteur directeur de la tangente au support de l'arc et $f''(t)$ est dirigé dans le sens de la concavité de la courbe.

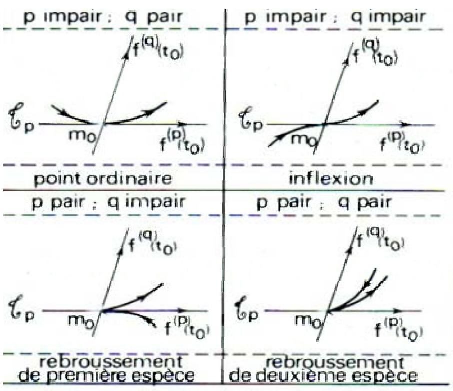
Soit $(\gamma) = (I, f)$ un arc de classe $\mathcal{C}^2$, si $(f'(t), f''(t))$ est lié on dit que le point $M(t) = f(t)$ est un point d'inflexion analytique de la courbe, si la courbe traverse la tangente on dit que l'on a un point d'inflexion géométrique.

Soit $(\gamma) = (I, f)$ un arc de classe $\mathcal{C}^2$ et $t_0 \in I$, on suppose qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $1 \leq p \leq q$ tel que p est le premier entier non-nul tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ et q est le premier entier supérieur à p tel que $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ soit libre on a :

- $f^{(p)}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe en $M_{t_0} = f(t_0)$
- Position de la courbe par rapport à sa tangente pour un arc $\gamma = (I, f)$, $t_0 \in I$: Au voisinage de t_0 on a :

$$f(t) = f(t_0) + \frac{(t - t_0)^p}{p!}(1 + o(1))f^{(p)}(t_0) + \frac{(t - t_0)^q}{q!}(1 + o(1))f^{(q)}(t_0),$$

ce qui donne les positions suivantes de la courbe par rapport à sa tangente :



3 Branches infinies des courbes planes

Soit $\gamma = (I, f)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\quad f(t) = (x(t), y(t))$

Définition 8 *γ présente une branche infinie en une extrémité a de I ($a \in \overline{\mathbb{R}}$) si* $\lim\limits_{t \to a} |x(t)| + |y(t)| = +\infty$

- Si $\lim\limits_{t \to a} |x(t)| = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to a} y(t) = y_0$ Alors la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à la courbe.
- Si $\lim\limits_{t \to a} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t \to a} |y(t)| = +\infty$ Alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe.
- Si $\lim\limits_{t \to a} |x(t)| = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to a} |y(t)| = +\infty$ Alors

- Si $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{y(t)}{x(t)}=0$ Alors la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox)
- Si $\lim\limits_{t\to a}\left|\dfrac{y(t)}{x(t)}\right|=+\infty$ Alors la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy)
- Si $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{y(t)}{x(t)}=\alpha,\ \alpha\neq 0$ Alors
  - Si $\lim\limits_{t\to a}y(t)-\alpha x(t)=\beta$ Alors la droite d'équation $y=\alpha x+\beta$ est asymptote à la courbe.
  - Si $\lim\limits_{t\to a}|y(t)-\alpha x(t)|=+\infty$ Alors la courbe admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=\alpha x$.

4 Equation cartésienne

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^p$, $p\geq 1$.

$f(x,y)=0$ est l'équation cartésienne d'une courbe (C) du plan, $(C)=\{M(x,y)\in E,\ (x,y)\in U,\ f(x,y)=0\}$

Théorème 1
Si $f(x_0,y_0)=0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$
Alors au voisinage de (x_0,y_0), x *est un paramètre admissible de la courbe, c'est à dire qu'il existe* $r_1>0$, $r_2>0$ *et un unique paramétrage cartésien* $(]x_0-r,x_0+r[,\varphi)$ *de classe* $\mathcal{C}^p$, *tels que*
$]x_0-r_1,x_0+r_1[\times]y_0-r_2,y_0+r_2[\subset U,\ \varphi(x_0)=y_0,\ \varphi(]x_0-r,x_0+r[)\subset]y_0-r_2,y_0+r_2[$,
$\forall(x,y)\in]x_0-r_1,x_0+r_1[\times]y_0-r_2,y_0+r_2[,\ f(x,y)=0$ *si et seulement si* $y=\varphi(x)$ *de plus*
$\varphi'(x)=-\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$.

Remarque 1
Si $f(x_0,y_0)=0$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0$ *Alors* y *est un paramètre admissible de la courbe au voisinage de* (x_0,y_0).

- Points singuliers : $M(x,y)$ est un point singulier si et seulement si $\mathrm{Grad}f(x,y)=0$.
- En un point régulier $M(x,y)$ (soit $\mathrm{Grad}f(x,y)\neq 0$),
  le vecteur $\mathrm{Grad}f(x,y)=(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ est un vecteur directeur de la normale à la courbe en $M(x,y)$ et $(-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y),\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y))$ est un vecteur directeur de la tangente à la courbe.
- En un point régulier $M(x_0,y_0)$, la tangente admet pour équation cartésienne :

$$(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$$

5 Equation polaire

5.1 définition

Pour $\theta\in\mathbb{R}$ on notera $\vec{u}_\theta=\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta=-\sin\theta\vec{i}+\cos\theta\vec{j}$, θ est une mesure de l'angle $\widehat{(\vec{i},\vec{u}_\theta)}$. Pour un point M du plan et (ρ,θ) un système de coordonnées polaires de M, $\overrightarrow{OM}=\rho\cos\theta\vec{i}+\rho\sin\theta\vec{j}$ soit $\overrightarrow{OM}=\rho\vec{u}_\theta$.

Pour f de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ on appelle arc paramétré d'équation polaire $\rho=f(\theta)$ l'arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, (I,φ) où $\varphi(\theta)=f(\theta)\vec{u}_\theta$.

5.2 Propriétés

Soit ρ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, $k\geq 2$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\rho=\rho(\theta)$ une équation polaire d'un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$

- $\dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}=\vec{v}_\theta$ et $\dfrac{d\vec{v}_\theta}{d\theta}=-\vec{u}_\theta$
- $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $(M_\theta,\vec{u}_\theta,\vec{v}_\theta)$ est un repère orthonormé direct c'est un repère local associé à M_θ.

- $\forall \theta \in I,\ \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = \rho'(\theta)\vec{u}_\theta + \rho(\theta)\vec{v}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}_\theta}{\mathrm{d}\theta^2} = \left(\rho''(\theta) - \rho(\theta)\right)\vec{u}_\theta + 2\rho'(\theta)\vec{v}_\theta$
  Le point M_θ, $\theta \in I$ est un point birégulier si et seulement si $\alpha(\theta) = \det(f'(\theta), f''(\theta)) \neq 0$, avec $\alpha(\theta) = 2\rho'(\theta)^2 - \rho(\theta)\rho''(\theta) + \rho(\theta)^2$.
- Le point M_{θ_0} est un point d'inflexion géométrique si et seulement si $\alpha(\theta)$ s'annule en changeant de signe en θ_0.
- O est le seul point stationnaire possible et O est un point stationnaire si et seulement si $\exists \theta \in I,\ f(\theta) = f'(\theta) = 0$
- Si M_θ est un point birégulier et $M \neq O$ alors la concavité de la courbe en M_θ est dirigée vers O si et seulement si $\alpha(\theta) > 0$.
- On peut aussi interpréter la courbe dans $\mathbb{C}$ en considérant les affixes des points du plan et des vecteurs avec $z(\theta) = \rho(\theta)e^{i\theta}$, $z'(\theta) = \rho(\theta)e^{i\theta} + \rho(\theta)e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}\ldots$

5.3 Eléments d'étude

Soit $\rho = \rho(\theta)$ une équation polaire d'un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k,\ k \geq 2,\ \theta \in I$.

1. **Définition 9** *Si θ est une valeur régulière du paramètre on note V une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u}_\theta, \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}})$, par suite :* $\tan v = \dfrac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$.
   La connaissance de V permet de tracer la tangente à la courbe en M_θ.
2. **Etude en O**
   On se place en une valeur de $\theta \in I$ pour laquelle $M_\theta = O$ soit $\rho(\theta) = 0$.
   - La tangente en O admet pour vecteur directeur $\vec{u}_\theta$.
   - Si de plus O est un point stationnaire ($\rho(\theta) = \rho'(\theta) = 0$), on détermine le premier entier $p \geq 2$ (s'il existe) tel que $\rho^{(p)}(\theta) \neq 0$, si p est pair O est un point de rebroussement de première espèce et si p est impair O est un point ordinaire.

5.4 Branches infinies

Soit $\rho = \rho(\theta)$ une équation polaire d'un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k,\ k \geq 2,\ \theta \in I$.

- On suppose $\theta \to \pm\infty$
  - Si $\lim \rho(\theta) = 0$ Alors la courbe présente une branche infinie en spirale et O est point asymptote à la courbe.
  - Si $\lim \rho(\theta) = \rho_0 \neq 0$ alors le cercle de centre O et de rayon $|\rho_0|$ est cercle asymptote à la courbe.
  - Si $\lim \rho(\theta) = \pm\infty$ Alors la courbe présente une spirale divergente
- On suppose $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta) = \pm\infty$ avec $\theta_0 \in \mathbb{R}$.
  - Si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0) = y_0$ Alors la droite d'équation $y = y_0$ dans le repère $(O, \vec{u}_{\theta_0}, \vec{v}_{\theta_0})$ est asymptote à la courbe.
  - Si $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} |\rho(\theta)\sin(\theta - \theta_0)| = +\infty$ Alors la courbe admet une branche parabolique de direction la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}_{\theta_0}$.

6 Propriétés métriques

6.1 Abscisse curviligne

Soit E un espace euclidien rapporté à repère orthonormé et $\gamma = (I, f)$ un arc orienté de classe $\mathcal{C}^p,\ p \geq 1$ régulier.

Définition 10 *On appelle abscisse curviligne toute fonction s définie sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :* $s' = \| f' \|$.

Proposition 3 *Soit $t_0 \in I$*
Si s est une abscisse curviligne de γ Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall t \in I,\ s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \| f'(u) \| \,\mathrm{d}u + C$

Un arc paramétré régulier est rectifiable (c'est à dire que l'on peut calculer la longueur de son support), le calcul d'une abscisse curviligne s s'appelle la **rectification**, pour $(a,b) \in I^2, a \leq b$ si $A = f(a)$ et $B = f(b)$ alors $s(b) - s(a) = \displaystyle\int_a^b \| f'(t) \| \,\mathrm{d}t$ est la longueur de l'arc de courbe parcouru par $M(t)$ pour t variant entre a et b, on note $f(\widehat{AB}) = s(b) - s(a)$.

Lorsque l'on fait un choix $t_0 \in I$ pour définir une abscisse curviligne $s : t \mapsto \int_{t_0}^{t} \| f'(u) \| \, du$ on dit que $M(t_0)$ ou plus simplement t_0 est l'origine des abscisses curvilignes sur γ.

La longueur ne dépend que de l'arc géométrique, elle ne dépend pas de la paramétrisation.

Proposition 4 *Une abscisse curviligne est un paramétrage admissible de l'arc orienté* γ

Définition 11
On appelle paramètre normal de l'arc γ *tout paramétrage admissible* (J, g) *de* γ *tels que* $\forall u \in J, \| g'(u) \| = 1$

Proposition 5 (J, g) *est un paramétrage normal de* γ *si et seulement si il existe une abscisse curviligne* s *de* γ *telle que* $g = f \circ s^{-1}$ *ou* $g = f \circ (-s)^{-1}$.

On dit que s et $-s$ sont des paramètres normaux de γ.

6.2 Repère de Frenet

E est le plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\gamma = (I, f)$ un arc paramétré orienté régulier de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 2$ définissant l'arc géométrique Γ et (J, g) une paramétrisation normale $g : s \mapsto g(s)$.

Définition 12 *On appelle vecteur unitaire de la tangente orientée de* Γ *en* $M(s)$ *le vecteur* $\vec{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{ds}} = g'(s)$.

Soit $\vec{T_1}$ le vecteur normé directement orthogonal à $\vec{T}$, si $\vec{T} = \cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j}$ alors $\vec{T_1} = -\sin(\alpha)\vec{i} + \cos(\alpha)\vec{j}$.

Définition 13 $(M(s), \vec{T}, \vec{T_1})$ *est un repère orthonormé direct appelé repère de Frenet en* $M(s)$ *à la courbe orientée de paramétrisation* γ.

Remarque 2 *Par un changement de paramètre admissible direct (c'est à dire de même orientation) (resp. indirect)* $s, \vec{T}, \vec{T_1}$ *sont invariants (resp. changés en leur opposé).*

Proposition 6
L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ *est une bijection continue de* $]-\pi, +\pi[$ *sur* $\mathbf{U} \setminus \{-1\}$ *où* $\mathbf{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.
Son application réciproque notée Arg est une bijection continue de $\mathbf{U} \setminus \{-1\}$ *sur* $]-\pi, \pi[$.
Si $u = x + iy,\ u \neq -1,\ x^2 + y^2 = 1$ *alors* $Arg(u) = 2\arctan\left(\dfrac{y}{1+x}\right)$

Théorème 2 (Théorème de relèvement) *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$
Si $f : I \mapsto \mathbb{C}$ *est une fonction complexe de classe* $\mathcal{C}^p$, $p \geq 1$ *à valeurs dans le cercle unité* $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$
Alors il existe une fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t)$ *de classe* $\mathcal{C}^p$ *de* I *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $\forall t \in I, f(t) = e^{i\varphi(t)}$.
φ *est appelé* **relèvement** *de* f

Conséquence :

Proposition 7 *Pour la paramérisation normale* (J, g) *de* γ *de classe* $\mathcal{C}^p$, $p \geq 2$ *il existe une application* $\varphi : J \mapsto \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^{p-1}$ *telle que* $\forall s \in J,\ \vec{T}(s) = \cos\varphi(s)\vec{i} + \sin\varphi(s)\vec{j}$

Si φ et φ_1 sont deux telles applications alors $\exists k \in \mathbb{Z},\ \varphi_1 = \varphi + 2k\pi$.
Propriétés : avec des notations usuelles abusives

- $\varphi = mes(\widehat{\vec{i}, \vec{T}})[2\pi]$
- $\cos(\varphi) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$
- $\tan\varphi = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en tout point où x' ne s'annule pas.

Coordonnées polaires :

Si Γ admet pour équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ avec ρ de classe $\mathcal{C}^p,\ p \geq 2$. Avec les notations précédentes : $\varphi = mes(\widehat{\vec{i}, \vec{T}})$, $V = mes(\widehat{\vec{u}_\theta, \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}})$ on a :

- $V = mes(\widehat{\vec{u}_\theta, \vec{T}})$
- $\varphi = V + \theta[2\pi]$
- En un point où $\rho' \neq 0$ $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$.

6.3 Courbure

Soit $\gamma = (I, f)$ un arc paramétré orienté régulier de classe $\mathcal{C}^p,\ p \geq 2$ définissant un arc géométrique Γ et soit (J, g) un paramétrisation normale de paramètre s.
Au point de paramètre s soit $\vec{T}$ le vecteur unitaire de la tangente orientée et $\vec{T_1}$ le vecteur directement orthogonal à $\vec{T}$.
La droite passant par $M(s)$ et de vecteur directeur $\vec{T}$ est la tangente à la courbe en $M(s)$
La droite passant par $M(s)$ et de vecteur directeur $\vec{T_1}$ est la normale à la courbe en $M(s)$

Définition 14 *On appelle courbure algébrique de Γ en $M(s)$ le réel $c_1(s) = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$.*

Proposition 8 *la courbure en $M(s)$ est nulle si et seulement si $M(s)$ est un point d'inflexion analytique.*

Lorsque la courbure est non-nulle on définit aussi le rayon de courbure algébrique : $R_1(s) = \dfrac{1}{c_1(s)}$.

Pour un arc birégulier de classe $\mathcal{C}^p,\ p \geq 2$, la courbure est non-nulle et garde un signe constant, sa valeur absolue $c(s) = |c_1(s)|$ est la courbure de Γ en $M(s)$, le rayon de courbure algébrique est défini, sa valeur absolue est le rayon de courbure de Γ en $M(s)$ $R(s) = |R_1(s)|$.

Calcul du rayon de courbure

- Pour un arc birégulier γ de classe $\mathcal{C}^p,\ p \geq 2$, φ est un paramètre admissible de γ considéré comme arc de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ et on a $R_1 = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}$.
- En coordonnées cartésiennes : $\gamma = (I, f)$ avec $f(t) = (x(t), y(t))$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \qquad c_1 = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad R_1(t) = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}.$$

- En coordonnées polaires :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} \qquad c_1 = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad R_1(t) = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

Formules de Frenet

Pour un arc birégulier γ de classe $\mathcal{C}^p,\ p \geq 2$ de paramètre normal s

- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = c_1\vec{T_1}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T_1}}{\mathrm{d}s} = -c_1\vec{T}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}\varphi} = \vec{T_1}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\vec{T_1}}{\mathrm{d}\varphi} = -\vec{T}$
- Centre de courbure :
  On appelle centre de courbure en $M(s)$ le point $C(s)$ défini par : $\overrightarrow{MC} = R_1\vec{T_1}$ soit $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + R_1\vec{T_1}$