CONIQUES

Soit P un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé

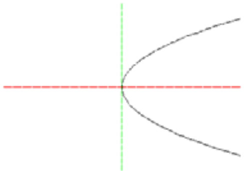
I Définitions:

1) Coniques définies par foyer et directrice:
Soit D une droite du plan , F un point de P et e un réel strictement positif. On appellera Δ la droite passant par F et perpendiculaire à D.

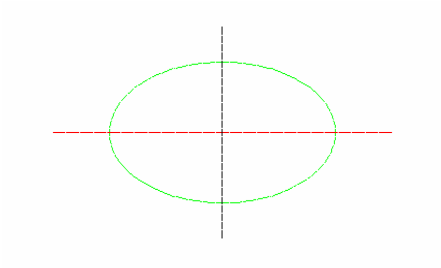
Définition: On appelle conique de foyer F, de directrice D et d'excentricité e l'ensemble des points M de P tels que d(M,F)=ed(M,D).

On distingue trois types de coniques en fonction de la valeur de l'excentricité:

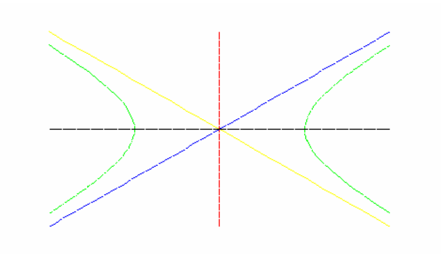
- e=1 Parabole: .Un seul couple foyer, directrice
.Un seul sommet
.Un seul axe de symétrie: la droite perpendiculaire à D et passant par F



-0<e<1 Ellipse: .Deux couples foyer, directrice
.Deux sommets
.Deux axes de symétrie
.Un centre de symétrie.



-e>1 Hyperbole: .Deux couples foyer, directrice
.Deux sommets
.Deux axes de symétrie
.Un centre de symétrie.



Paramètre d'une conique:
On considère la droite passant par F et perpendiculaire à Δ, cette droite rencontre la conique en 2 points E et E' symétriques par rapport à Δ.
La distance EF est appelée paramètre de la conique.

2) Définition bifocale:
Soit F et F' 2 points distincts du plan P et a>0.
L'ellipse de foyers F et F', de grand axe 2a est l'ensemble des points M tels que MF + MF' =2a.
L'hyperbole de foyers F et F', de grand axe 2a est l'ensemble des points M tels que |MF - MF'|=2a.

3)Equation cartésienne:
Définition: On appelle conique une courbe d'équation:
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad avec \quad (A,B,C) \neq (0,0,0)$

Si $B^2-4AC<0$: La conique est du type ellipse. Equation réduite: $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ (Ellipse) , $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0$ (1point) ou l'ensemble vide.

Si $B^2-4AC>0$: La conique est du type hyperbole. Equation réduite: $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$ (Hyperbole), $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0$ (2 droites).

Si $B^2-4AC=0$: La conique est du type parabole. Equation réduite: $Y^2=2pX \;\; p>0$, (Parabole), $Y^2=a$ (a>0, 2 droites $//$, a=0, 2 droites confondues, a<0 l'ensemble vide.)

II Eléments de réduction des coniques:

1) Ellipse:

Equation réduite $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ a>b>0.

On pose: $c=\sqrt{a^2-b^2}$

Centre: O origine du repère

Foyers: F'(-c,0) et F(c,0)

Directrices: D': $x=-\frac{a^2}{c}$ D:x=$\frac{a^2}{c}$

Excentricité: $e=\frac{c}{a}$

Paramètre: EF=$\frac{b^2}{a}$

Equation de la tangente en $M\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$: $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$

Propriété géométrique: La tangente en un point M de l'ellipse est la bissectrice extérieure de $(F'\widehat{M}F)$.

Représentation paramétrique: $\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases} \quad \theta\in[0,2\pi]$

2) Hyperbole:

Equation réduite: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \;\; a>0 \;\; b>0$.

On pose $c=\sqrt{a^2+b^2}$

Centre: O origine du repère.

Foyers: F'(-c,0) F(c,0).

Directrices: $D':x=-\frac{a^2}{c}$ $D:x=\frac{a^2}{c}$

Excentricité: $e=\frac{c}{a}$ si $e=\sqrt{2}$ $(ie \;\; a=b)$ on dit que l'hyperbole est équilatère.

Asymptôtes: $As':y=-\frac{b}{a}$ $As:y=\frac{b}{a}$ une hyperbole est équilatère si et seulement si ses asymptôtes sont perpendiculaires.

Paramètre: EF=$\frac{b^2}{a}$.

Equation de la tangente en un point $M\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ de l'hyperbole: $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$

Propriété géométrique : La tangente en un point M de l'hyperbole est bissectrice intérieure de l'angle $(F'\widehat{M}F)$.

Représentation paramétrique: $\begin{cases}x=\dfrac{a}{\cos\theta}\\y=b\tan\theta\end{cases} \quad \theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$

Autre représentation paramétrique: $\begin{cases}x=\in ach\theta\\y=bsh\theta\end{cases} \quad \in^2=1,\ \theta\in\Re$

3) <u>Parabole</u>:
<u>Equation réduite</u>: $y^2 = 2px$.

<u>Foyer</u>: F$(\frac{p}{2},0)$

<u>Directrice</u>: $D: x = -\frac{p}{2}$

<u>Excentricité</u>: e=1
<u>Paramètre</u>: EF=p

<u>Equation de la tangente</u> en un point $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ de la parabole: $yy_0 = p(x + x_0)$

<u>Propriété géométrique</u>: La tangente en un point M de la parabole est bissectrice intérieure de l'angle $(\widehat{HMF})$ où H est la projection orthogonale de M sur la directrice D.

<u>Représentation paramétrique</u>: $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \quad t \in \Re \\ y = t \end{cases}$

4) <u>Application du calcul différentiel aux coniques</u>:
(C): $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + f = 0 \quad (A,B,C) \neq (0,0,0)$

(C) est une conique à centre si et seulement si le système $\begin{cases} 2Ax + 2By + 2D = 0 \\ 2Bx + 2Cy + 2E = 0 \end{cases}$ a une et une seule solution.

S'il n'y a pas de solution c'est une parabole.
S'il y a une droite solution (C) est la réunion de 2 droite parallèles (distinctes ou confondues)