Devoir libre
(éléments de correction)

Fonction dzêta de Riemann

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ est une série de Riemann, celle-ci converge si et seulement si $x > 1$, de sorte que l'ensemble de définition de ζ est $]1, +\infty[$, ζ est bien définie sur$]1, +\infty[$.
2. Soit $a > 1$, pour $x \in [a, +\infty[$ et $n \geq 1$ on a $0 < \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$ avec $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ est une série convergente et $\frac{1}{n^a}$ ne dépend pas de x, de sorte que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge normalement et donc uniformément sur $[a, +\infty[$
3. Pour $n \geq 1$ et $x \in]1, +\infty[$, posons $f_n(x) = \frac{1}{n^x}$, on a :
   - $\forall n \geq 1,\ f_n$ est continue sur $]1, +\infty[$
   - $\forall a > 1,\ \sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$

   De sorte que la fonction somme ζ est continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ $\forall a > 1$, par suite ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
   D'autre part :
   - Pour $n = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1$ et $\forall n \geq 2$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 0$
   - Pour $a > 1$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$

   De sorte $\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x}$ soit
   $$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$$
4. Pour $n \geq 1$ f_n est décroissante sur $]1, +\infty[$ de sorte que ζ est une somme de fonctions décroissante sur $]1, +\infty[$ donc ζ est déroissante sur $]1, +\infty[$.
5. On utilise le théorème de dérivation terme à treme des séries de fonctions, on a :
   - $\forall n \geq 1, \quad f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$
   - $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$
   - Pour tout segment $[a, b] \subset]1, +\infty[$, $n \geq 1$ et $x \in [a, b]$ on a $f_n'(x) = -\frac{\ln n}{n^x}$, $0 \leq | f_n'(x) | \leq \frac{\ln n}{n^a}$.
     D'autre part soit a' tel que $1 < a' < a$, on a en $+\infty$, $\frac{\ln n}{n^a} = o(\frac{1}{n^{a'}})$ avec $\frac{1}{n^{a'}} > 0$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{a'}}$ convergente, par suite $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment de $]1, +\infty[$

   On en déduit que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et $\forall x \in]1, +\infty[$, $\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}$.
6. D'une manière générale on a :
   - $\forall n \geq 1,\ f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ avec pour $p \in \mathbb{N},\ x \in]1, +\infty[$, $f_n^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p (\ln n)^p}{n^x}$
   - Pour tout segment $[a, b] \subset]1, +\infty[$, $, p \in \mathbb{N},\ x \in [a, b]$ on a $0 <| f^{(p)}(x) | \leq \frac{(\ln n)^p}{n^a}$. Soit alors a' tel que $1 < a' < a$, on a $\frac{(\ln n)^p}{n^a} = o(\frac{1}{n^{a'}})$ avec $\frac{1}{n^{a'}} > 0$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{a'}}$ convergente.
     De sorte que $\sum_{n\geq 1} f_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment de $]1, +\infty[$

   En utilisant le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions et une récurrence on en déduit que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et $\forall p \in \mathbb{N},\ x \in]1, +\infty[$, $\zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p (\ln n)^p}{n^x}$

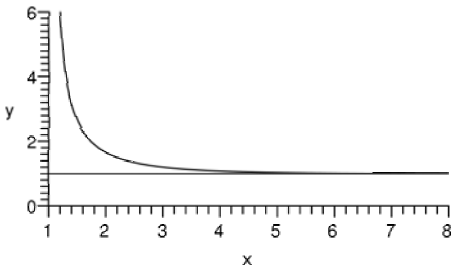
En particulier $\forall x \in]1,+\infty[,\ \zeta''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x} > 0$, par suite la fonction ζ est convexe sur $]1,+\infty[$.

7. ζ est une fonction décroissante sur $]1,+\infty[$ de sorte que ζ admet une limite à droite en 1 (avec $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = \sup_{t\in]1,+\infty[} \zeta(t)$), soit L cette limite avec $L \in \overline{\mathbb{R}}$.
   Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$, $\zeta(x) \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^x}$, par passage à la limite lorsque x tend vers 1^+ il vient $L \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$ ceci pour tout $N \geq 1$, comme $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = +\infty$ on en déduit que $L = +\infty$ et par suite
   $$\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$$

8. Voici le tableau de variation de la fonction ζ :

t	1		2		$+\infty$
$h(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$\pi^2/6$	$\searrow$	1

   et la représentation graphique de ζ sur $]1,+\infty[$ avec son asymptôte horizontale en d'équation $y = 1$ et son asymptôte verticale d'équation $x = 1$:



9. Pour $x > 1,\ n \geqslant 1,\ k \geqslant 1,\ t \in [k, k+1]$ on a :
$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{1}{(k+1)^x} & \leqslant & \dfrac{1}{t^x} & \leqslant & \dfrac{1}{k^x} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^x} & \leqslant & \displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t & \leqslant & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} \end{array}$$
   En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient :
$$\begin{array}{ccccc} \zeta(x) - 1 & \leqslant & \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t & \leqslant & \zeta(x) \\ \zeta(x) - 1 & \leqslant & \dfrac{1}{x-1} & \leqslant & \zeta(x) \quad \text{d'où} \\ \dfrac{1}{x-1} & \leqslant & \zeta(x) & \leqslant & 1 + \dfrac{1}{x-1} \\ 1 & \leqslant & (x-1)\zeta(x) & \leqslant & x \qquad \text{par suite} \end{array}$$
$$\lim_{x\to 1^+} (x-1)\zeta(x) = 1 \quad \text{et} \quad \zeta(x) \underset{1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$$

Théorèmes de Weierstrass

Polynômes de Bernstein

1. Posons pour $t \in [0,1]$, $\varphi(t) = (b-a)t + a$, φ est une fonction affine bijective de $[0,1]$ sur $[a,b]$ (avec $a < b$), φ et φ^{-1} sont continues.
   Pour f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) posons $g(t) = f \circ \varphi(t)$, on a : $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) \Leftrightarrow g \in \mathcal{C}([0.1],\mathbb{K})$ où $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}$ espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
   Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynômes de la variable réelle à cœfficients dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers g sur $[0,1]$

Alors posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n = P_n \circ \varphi^{-1}$, Q_n est une fonction polynôme de la variable réelle et $\sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - Q_n(x)| = \sup\limits_{x\in[a,b]} |g \circ \varphi^{-1}(x) - P_n \circ \varphi^{-1}(x)| = |\sup\limits_{t\in[0,1]} |g(t) - P_n(t)|$ on en déduit que $(Q_n)_n$ est une suite de fonctions polynômes de la variable réelle qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.
Il suffit donc de montrer le théorème pour les fonctions définies et continues sur $[0, 1]$.

On va montrer le rhéorème pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, f désignera une fonction définie continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et les fonctions polynômes considérées seront à cœfficients dans $\mathbb{K}$.

2. **Remarque 1**

   L'application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & B_n(P) \end{array}$ *est un endomorphisme de* $\mathbb{K}[X]$

   pour $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \geq 1$ on a :

   $$\frac{X(1-X)}{n}B_n'(P)(X) + XB_n(X) =$$
   $$\frac{X(1-X)}{n}\sum_{k=0}^{n} P(\frac{k}{n})\binom{n}{k}\left[kX^{k-1}(1-X)^{n-k} - (n-k)X^k(1-X)^{n-k-1}\right] + X\sum_{k=0}^{n} P(\frac{k}{n})\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} =$$
   $$\sum_{k=0}^{n} P(\frac{k}{n})\binom{n}{k}\left[\frac{k}{n}X^k(1-X)^{n-k+1} - (1-\frac{k}{n})X^{k+1}(1-X)^{n-k} + X^{k+1}(1-X)^{n-k}\right] =$$
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}P(\frac{k}{n})\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}\left[1 - X + X\right] \text{ soit}$$
   $$\frac{X(1-X)}{n}B_n'(P)(X) + XB_n(X) = B_n(XP)$$

   On en déduit : $B_n(1) = 1$, $\quad B_n(X) = X$ et $B_n(X^2) = X^2 + \dfrac{X(1-X)}{n}$

3. On a :

   $$\sum_{k=0}^{n}(k-nX)^2\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = n^2\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k^2}{n^2} - 2\frac{k}{n}X + X^2\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$$
   $$\sum_{k=0}^{n}(k-nX)^2\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = n^2\left(B_n(X^2) - 2XB_n(X) + X^2B_n(1)\right)$$
   $$\sum_{k=0}^{n}(k-nX)^2\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = nX(1-X)$$

   Pour $t \in [0, 1]$ on a $t(1-t) \leq \dfrac{1}{4}$ et d'après la question précédente :

   $$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n} - t\right)^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} = \frac{t(1-t)}{n}$$
   $$\sum_{k\in A_n}\left(\frac{k}{n} - t\right)^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \leq \frac{t(1-t)}{n}$$
   $$\sum_{k\in A_n}\left(\frac{k}{n} - t\right)^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \leq \frac{1}{4n} \quad \text{soit}$$
   $$\sum_{k\in A_n}\alpha^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \leq \frac{1}{4n} \quad \text{d'où}$$
   $$\sum_{k\in A_n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}$$

4. **Remarque 2**

   L'application : $\begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}[X] \\ f & \mapsto & B_n(f) \end{array}$ *est une application linéaire.*

   Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que $\forall (t, t') \in [0, 1]^2$, $|t - t'| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, , pour $t \in [0, 1]$, $A_n = \{k \in [\![0, n]\!], |\dfrac{k}{n} - t| \geqslant \alpha\}$ et $A_n' = [\![0, n]\!] \setminus A_n$, on a :

   $$|\, f(t) - B_n(f)(t)\,| = |\, f(t)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\,|$$

f est continue sur le segment $[0,1]$, donc f est bornée sur ce segment, soit $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in [0,1],\ |f(t)| \leqslant M$.

$$\begin{aligned}
| f(t) - B_n(t) | &\leqslant \sum_{k \in A_n} | f(t) - f(\frac{k}{n}) | \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} + \sum_{k \in A'_n} | f(t) - f(\frac{k}{n}) | \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
| f(t) - B_n(t) | &\leqslant \frac{2M}{4n\alpha^2} + \varepsilon \sum_{k \in A'_n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
| f(t) - B_n(t) | &\leqslant \frac{2M}{4n\alpha^2} + \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \\
| f(t) - B_n(t) | &\leqslant \frac{2M}{4n\alpha^2} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Soit alors $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow \dfrac{M}{2n\alpha^2} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, on a alors :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \forall t \in [0,1],\ | f(t) - B_n(f)(t) | \leq \varepsilon$

De sorte que $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément vers f sur $[0,1]$, d'où le théorème.

Polynômes trigonométriques

1. Pour $T > 0$, soit $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions définies, continues sur $\mathbb{R}$ et T périodiques et $\mathcal{P}_T$ le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des polynômes trigonométriques T périodiques. $\mathcal{P}_T = \text{vect} < e^{\frac{2\pi}{T} int} >_{n \in \mathbb{Z}}$. Pour une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $T > 0$ on pose $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(\dfrac{T}{2\pi} t)$, on a $f \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Leftrightarrow g \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.
   Pour $Q_n \in \mathcal{P}_{2\pi}$, posons $P_n(t) = Q_n(\dfrac{2\pi}{T} t)$, on a alors :
   Si $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{P}_{2\pi}$ qui converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$ alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{P}_T$ qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, de sorte qu'il suffit de montrer le théorème pour les fonctions 2π périodiques.
2. (a) posons $V = \text{vect} < 1, \cos nt, \sin nt >_{n \geqslant 1}$
   $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{int} = \cos nt + i \sin nt \in V$ et $e^{-int} = \cos nt - i \sin nt \in V$ donc $E \subset V$
   $1 \in E$ et $\forall n \geq 1,\ \cos nt = \dfrac{1}{2}(e^{int} + e^{-int}) \in E, \quad \sin nt = \dfrac{1}{2i}(e^{int} - e^{-int}) \in E$ de sorte que $V \subset E$ et par suite $E = V$ soit $E = \text{vect} < 1, \cos nt, \sin nt >_{n \geq 1}$
   E_P(resp. E_I) est un sous-espace vectoriel de E et les éléments de E sont des fonctions paires(resp. impaires), $E_P \cap E_I = \{0\}$ et si $f \in E,\ f(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{finie} a_k \cos kt + b_k \sin kt = (\sum_{finie} a_k \cos kt) + \sum_{finie} b_k \sin kt) \in E_P + E_I$ d'où $E = E_P \oplus E_I$
   (b) en utilisant les formules de Moivre ($\cos nt = \text{Re}(\cos t + i \sin t)^n$) et d'Euler ($\cos^n t = \left(\dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^n$, $\sin^n t = \left(\dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^n$) on montre que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ \cos nt \in \text{vect} < \cos^k t >_{k \in [\![0,n]\!]} \subset \text{vect} < \cos^k t >_{k \in \mathbb{N}}$ soit $E_P \subset \text{vect} < \cos nt >_{n \in \mathbb{N}}$ et $\cos^n t \in \text{vect} < \cos \text{kt} >_{k \in [\![0,n]\!]}$ soit $\text{vect} < \cos nt >_{n \in \mathbb{N}} \subset E_P$ d'où $E_P = \text{vect} < \cos nt >_{n \in \mathbb{N}}$
   (c) En raisonnant de même on montre aussi $E_I = \text{vect} < \sin t \cos nt >_{n \in \mathbb{N}^*}$
3. g est définie et continue sur le segment $[-1,+1]$ donc en utilisant le théorème de Weierstrass démontré précédemment il existe une suite de polynômes $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge uniformément vers g sur $[-1,+1]$, posons alors pour $\theta \in [0,\pi],\ P_n(\theta) = Q_n(\cos\theta)$, $(P_n)_n$ est une suite de polynômes trigonométriques, on a $\displaystyle\sup_{\theta \in [0,\pi]} |g(\cos\theta) - Q_n(\cos\theta)| = \sup_{x \in [-1,+1]} |g(x) - Q_n(x|$ avec $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [-1,+1]} |g(x) - Q_n(x| = 0$ donc $(Q_n(\cos\theta))_n$ converge uniformément vers $g(\cos\theta)$ sur $[0,\pi]$ or $\forall \theta \in [0,\pi],\ g(\cos\theta) = f(\arccos(\cos\theta)) = f(\theta)$ et $Q_n(\cos\theta) = P_n(\theta)$.
   $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_n \in E_P$, de sorte que $(P_n)_n$ est une suite de E_P qui converge uniformément vers f sur $[0,\pi]$
4. (a) $f \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ avec $f(0) = f(\pi) = 0$ donc
   $\displaystyle\lim_{t \to 0} g(t) = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\sin t} \cdot \frac{f(t)}{t} = f'(0)$ et $\displaystyle\lim_{t \to \pi} \frac{f(t)}{\sin t} = \lim_{t \to \pi} \frac{f(t) - f(\pi)}{t - \pi} \cdot \frac{t - \pi}{\sin t - \sin\pi} = \frac{f'(\pi)}{\cos\pi} = -f'(\pi)$.
   Si on pose $g(0) = f'(0)$, $g(\pi) = -f'(\pi)$ et $\forall t \in]0,\pi[,\ g(t) = \dfrac{f(t)}{\sin t}$, g est alors continue sur $[0,\pi]$.
   (b) g est continue sur $[0,\pi]$, en utilisant le résultat montré en 3. il existe une suite de polynômes trigonométriques $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de E_P qui converge uniformément vers g sur $[0,\pi]$.

(c) La fonction $t \mapsto \sin t$ est bornée sur $[0,\pi]$ et $(h_n)_n$ converge uniformément vers g sur $[0,\pi]$, pour $n \in N^*$ posons $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $n \in N^*$ $P_n(\theta) = \sin\theta h_n(\cos\theta)$, d'après la question 2.c. $\forall n \in N^*$, $P_n \in E_I$ et la suite de polynômes trigonométriques $(P_n)_n$ converge uniformément vers $\sin\theta g = f$ sur $[0,\pi]$.

5. f est continue sur $[0,\pi]$ donc la suite de polynômes de Bernstein $(B_n(f))_{n\in N^*}$ avec $B_n(f)(t) = \sum_{k=0}^{n} f(\pi\frac{k}{n})\binom{n}{k}(\frac{t}{\pi})^k(1-\frac{t}{\pi})^{n-k}$ converge uniformément vers f sur $[0,\pi]$, donc pour $\varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,\pi],\ |f(t) - B_n(f)(t)| \leqslant \varepsilon$ de plus $B_n(f)(0) = f(0),\ B_n(f)(\pi) = f(\pi)$ et $B_n(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

6. Si f est continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et paire, d'après 3. il existe une suite $(h_n)_n$ de polynômes trigonométriques de E_P qui converge uniformément vers f sur $[0,\pi]$, $\forall n,\ h_n$ est une fonction paire et 2π périodique de sorte que $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x) - h_n(x)| = \sup_{x\in[0,\pi]}|f(x) - h_n(x)|$ par suite $(h_n)_n$ est une suite de E_P qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

7. Soit f continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et impaire, d'après 5. soit φ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(0) = f(0),\ \varphi(\pi) = f(\pi)$ et $\forall t \in [0,\pi], |f(t) - \varphi(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, comme f est impaire et 2π périodique on a $f(0) = f(\pi) = 0$, soit $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. D'après 4.c. il existe $\ell \in E_I$ tel que $\forall t \in [0,\pi],\ |\varphi(t) - \ell(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. On déduit de ce qui précède avec l'inégalité triangulaire que $\forall t \in [0,\pi],\ |f(t) - \ell(t)| \leqslant \varepsilon$, or f et ℓ sont des fonctions impaires et 2π périodiques donc $\forall t \in \mathbb{R},\ |f(t) - \ell(t)| \leqslant \varepsilon$.

   En appliquant le résultat pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ on construit une suite de polynômes trigonométriques $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E_I qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

8. Pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ f = f_1 + f_2$ avec $f_1(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$, $f_2(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$, f_1 et f_2 sont des fonctions 2π périodiques, continues sur $\mathbb{R}$ respectivement paire et impaire, d'après 6. et 7. il existe une suite $(h_n)_n$ de E_P et une suite $(\ell_n)_n$ de E_I telles que $(h_n)_n$ et $(\ell_n)_n$ converge uniformément respectivement vers f_1 et f_2 sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la suite $(t_n)_n$ de polynômes trigonométrique de E définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n = h_n + \ell_n$ est une suite de E qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ d'où le théorème.