Devoir libre

Fonction dzêta de Riemann

On considère la série de fonction $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^x}$ et on pose $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$

1. Montrer que ζ est définie sur $]1,+\infty[$
2. Montrer que pour $a>1$, $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^x}$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$
3. En déduire que ζ est continue sur $]1,+\infty[$ et étudier la limite de ζ en $+\infty$
4. Etudier les variations de ζ sur $]1,+\infty[$
5. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$
6. Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et étudier la convexité de ζ sur $]1,+\infty[$
7. Etudier la limite de ζ en 1
8. Etablir le tableau de variation de ζ sur $]1,+\infty[$ et représenter la courbe dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
9. Montrer que lorsque x tend vers 1^+ on a $\zeta(x)\sim\dfrac{1}{x-1}$ (on pourra utiliser une comparaison avec une intégrale).

Théorèmes de Weierstrass

Polynômes de Bernstein

L'objectif est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 (théorème de Weierstrass)
Si *f est une fonction numérique continue sur un intervalle $[a,b]$, $a<b$*
Alors *il existe une suite de polynômes $(P_n)_n$ telle que la suite de fonctions polynômes associée converge uniformément vers f sur $[a,b]$*

Ce problème propose de construire effectivement une suite de fonctions polynômes (polynômes de Berstein) qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

1. Construire une fonction affine qui est une bijection φ de $[0,1]$ sur $[a,b]$. En déduire que pour démontrer le théorème il suffit de raisonner sur l'intervalle $[0,1]$.
   Dans la suite on considère f une fonction définie et continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
2. Pour $P\in\mathbb{K}[X]$ on considère le polynôme :
   $$B_n(P)(X)=\sum_{k=0}^{n}P(\frac{k}{n})\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$$
   Montrer que : $B_n(XP)=\frac{X(1-X)}{n}B_n'(P)+XB_n(P)$. Calculer $B_n(1),B_n(X),B_n(X^2)$
3. Montrer que :
   $$\sum_{k=0}^{n}(k-nX)^2\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}=nX(1-X)$$
   En déduire que si $\alpha>0$ et $t\in[0,1]$ sont donnés, en notant : $A_n=\{k\in\{0,...,n\}\ /\ |\frac{k}{n}-t|\geq\alpha\}$ on a :
   $$\sum_{k\in A_n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\leq\frac{1}{4\alpha^2 n}$$

4. On considère la suite de fonctions polynômes $(B_n(f))_{n\geq 1}$ définie par :

$$B_n(f)(t) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} \text{ (\textbf{Polynômes de Berstein})}$$

   En utilisant le fait qu'une fonction f continue sur un intervalle $[0,1]$ est uniformément continue sur cet intervalle, c'est à dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \ / \ \forall (t,t') \in [0,1]^2, |t-t'| \leq \alpha \Rightarrow |f(t)-f(t')| \leq \varepsilon$$

   Montrer que f est la limite uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions polynômes $(B_n(f))_{n\geq 1}$.
   En déduire le théorème.

Polynômes trigonométriques

Il s'agit de montrer le théorème

Théorème 2 *Si f est une fonction définie, continue et T périodique ($T > 0$) sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{C}$ Alors il existe une suite de polynômes trigonométriques T périodiques qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

1. Justifier qu'il suffit de montrer le résultat pour les fonctions 2π périodiques.
2. On note $E = \text{vect} < e^{int} >_{n\in\mathbb{Z}}$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques 2π périodiques, $E_P = \text{vect}< \cos \text{nt} >_{n\in\mathbb{N}}$ et $E_I = \text{vect} < \sin nt >_{n\in\mathbb{N}^*}$
   (a) Montrer que $E = \text{vect} < 1, \cos nt, \sin nt >_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis que $E = E_P \oplus E_I$
   (b) Montrer que $E_P = \text{vect} < \cos^n t >_{n\in\mathbb{N}}$, soit que $E_P = \{P(\cos t),\ P \in \mathbb{C}[X]\}$
   (c) Montrer que $E_I = \text{vect} < \sin t \cos^n t >_{n\in\mathbb{N}}$, soit que $E_I = \{\sin t P(\cos t),\ P \in \mathbb{C}[X]\}$
3. Soit f une fonction définie et continue sur $[0,\pi]$, on considère la fonction g définie sur $[-1,+1]$ par : $\forall x \in [-1,+1], g(x) = (f \circ \arccos)(x)$, en appliquant le théorème de Weierstrass précédent à la fonction g sur $[-1,+1]$, montrer qu'il existe une suite de polynômes trigonométriques de E_P qui converge uniformément vers f sur $[0,\pi]$
4. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$, on pose pour $t \in]0,\pi[,\ g(t) = \dfrac{f(t)}{\sin t}$ montrer que :
   (a) g se prolonge en une fonction continue sur $[0,\pi]$, préciser les valeurs de $g(0)$ et $g(\pi)$ afin que g soit continue sur $[0,\pi]$
   (b) Il existe une suite de polynomes trigonométriques $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_P, qui converge uniformément vers g sur $[0,\pi]$
   (c) En déduire qu'il existe une suite de polynomes trigonométriques de E_I qui converge uniformément vers f sur $[0,\pi]$
5. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique, montrer que pour $\varepsilon > 0$ il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(0) = f(0)$, $\varphi(\pi) = f(\pi)$ et $\forall t \in [0,\pi]$, $|f(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon$ (on pourra utiliser les polynômes de Bernstein)
6. Montrer que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et paire, alors il existe une suite de polynomes trigonométriques de E_P qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$
7. Montrer que si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et impaire, alors pour $\varepsilon > 0$ il existe un élément $h \in E_I$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t) - h(t)| \leq \varepsilon$, en déduire qu'il existe une suite de polynomes trigonométriques de E_I qui converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$
8. En déduire le théorème.