# Fonctions de plusieurs variables

Quelques éléments sur les fonctions de plusieurs variables :

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels normés de dimensions finies, $\dim E = n$, $\dim F = p$, $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $E$ rapporté à la base $\mathcal{B}_E = (e_1, \ldots, e_n)$ et $F$ rapporté à la base $\mathcal{B}_F = (u_1, \ldots, u_p)$, soit $U$ un ouvert de $E$ et $f$ une fonction de $E$ dans $F$ définie sur $U$. $\forall x \in U$, $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ et $f(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x) u_i$, les fonctions $f_i$ sont les fonctions composantes de $f$, ce sont des fonctions de $U$ dans $\mathbb{R}$ et $f$ est une fonction de $n$ variables réelles.

Dans la suite on identifiera $E$ à $\mathbb{R}^n$ et $F$ à $\mathbb{R}^p$, on a alors

$$f: \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \end{array} \quad f_1, \ldots, f_q \text{ sont les fonctions composantes de } f.$$

Ce chapître utilise les définitions et résultats des espaces vectoriels normés. Les normes de $E$ et $F$ seront notées $\| \ \|_n$ et $\| \ \|_p$ respectivement.

# 1 Continuité

**Définition 1**
*Soit $x_0 \in U$, $f$ est continue en $x_0$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall x \in U$, $\| x - x_0 \|_n \leq \eta \Rightarrow \| f(x) - f(x_0) \|_p \leq \varepsilon$.*
*On dira que $f$ est continue sur $U$ si $f$ est continue en tout point $x \in U$.*

**Proposition 1**
*$f$ est continue en $x_0$ si et seulement si les fonctions composantes de $f$, $f_i$, $i \in \{1, \ldots, p\}$ sont continue en $x_0$.*

**Définition 2**
*Soit $\gamma = (I, \varphi)$ un arc paramétré continu de $E$, avec $I$ intervalle de $\mathbb{R}$, dont le support $\gamma^* = \{\varphi(t) \in E, t \in I\}$ est contenu dans $U$.*
- *On dira que $f$ est continue le long de $\gamma$ en $x_0 = \varphi(t_0)$, pour $t_0 \in I$ si $f \circ \varphi$ est continue en $t_0$.*
- *On dira que $f$ est continue le long de $\gamma$ si $f \circ \varphi$ est continue sur $I$.*

**Proposition 2**
*Si $f$ est continue sur $U$ Alors $f$ est continue le long de $\gamma$ pour tout chemin $\gamma = (I, \varphi)$, arc paramétré continu de $E$, avec $\gamma^*$ contenu dans $U$.*

**Exemple 1** *Soit $U$ un ouvert convexe . Pour $(a,b) \in U^2$ on considère le segment $[a,b]$ paramétré par :*
*$\gamma = ([0,1], \varphi)$ avec $\varphi(t) = a + th$ où $h = b - a$.*
*Si $f$ est continue sur $U$ Alors $f$ est continue le long du segment $[a,b]$, $\forall (a,b) \in U^2$*

**Définition 3 (fonctions partielles)** *Soit $a \in U$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ on notera $f_{a,x_j}$ ou plus simplement $f_{x_j}$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur $a$, l'application partielle : $f_{a,x_j} : t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n)$*

**Proposition 3** *Si $f$ est continue en $a$ alors $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, $f_{x_j}$ est continue en $a_j$*

# 2 Dérivées partielles

## 2.1 Définitions

**Définition 4**
*Soit $a \in U$, on dit que $f$ admet une dérivée partielle par rapport à la $j^{\text{ième}}$ composante en $a$ si $f_{a,x_j}$ est dérivable en $a_j$, on note alors :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = f'_{a,x_j}(a_j) = \lim_{t \to a_j} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{t - a_j}$$

*on note aussi :* $\mathrm{D}_j f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

**Proposition 4** *$f$ admet une dérivée partielle en $a$, $D_j f(a)$, $j \in \{1 \cdots, n\}$ si et seulement si chacune des fonctions composantes de $f$, $f_i$, $i \in \{1, \cdots, p\}$ admet une dérivée partielle, $D_j f_i$ en $a$ et on a alors :*

$$D_j f(a) = (D_j f_1(a), \ldots, D_j f_p(a))$$

## 2.2 Dérivée selon un vecteur

Soit $a \in U,\ h \in E,\ h \neq 0$ on considère l'application $\varphi_h : t \mapsto \varphi_h(t) = f(a+th)$, $U$ étant ouvert il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in ]-\eta, +\eta[,\ a+th \in U$

**Définition 5** *Si $\varphi_h$ est dérivable en 0 on dit que $f$ admet une dérivée en a selon le vecteur h (on dit aussi $f$ admet une dérivée en a suivant le vecteur h ) et on note :* $D_h f(a) = \varphi_h'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+th)-f(a)}{t}$

**Remarque 1** *$f$ admet une dérivée partielle en a rapport à $x_j$ si $f$ admet une dérivée en a suivant le vecteur $e_j$ et on a* $D_{e_j} f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$

## 2.3 Fonctions de classes $\mathcal{C}^1$

**Définition 6**
*$f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ si*

1. *$f$ est continue sur $U$*
2. *Les dérivées partielles $D_j f,\ j \in \{1, \ldots, n\}$ sont définies et continues sur $U$*

**Proposition 5**
*$f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ si et seulement si les fonctions composantes de $f$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$*

**Théorème 1** *Si les dérivées partielles de $f$ sont définies et continues sur $U$ Alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$.*

**Définition 7** *Soit $\mathcal{C}^1(U,F)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ à valeurs dans $F$, et $\mathcal{C}^0(U,F)$ l'ensemble des fonctions continues sur $U$ à valeurs dans $F$.*
*On notera $\mathcal{C}^1(U) = \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^0(U) = \mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$*

**Proposition 6**

- *$\mathcal{C}^0(U,F)$ et $\mathcal{C}^1(U,F)$ sont des sous espaces vectoriels du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $U$ dans $F$.*
- *L'application : $f \mapsto D_j f$ est une application linéaire de $\mathcal{C}^1(U,F)$ dans $\mathcal{C}^0(U,F)$*
- *$\mathcal{C}^0(U)$ et $\mathcal{C}^1(U)$ sont des $\mathbb{R}$-algèbres*

**Proposition 7**
*Si $V$ est un ouvert de $F$, $G$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie $q \geq 1$,*
$f \in \mathcal{C}^k(U,V), \quad g \in \mathcal{C}^k(V,G),\ k \in \{0,1\}$
*Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^k(U,G)$*

**Théorème 2 (Dérivée partielle de fonctions composées)**
*Soit $I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on suppose $\varphi$ et $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec :*

$$\varphi : \begin{array}{ccl} I & \to & U \\ t & \mapsto & \varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \end{array} \quad \text{et} \quad f : \begin{array}{ccl} U & \to & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

*On a :*

$$(f \circ \varphi)'(t) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j'(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t))$$

Conséquence :

**Théorème 3**
*Soit $\Omega$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}^q$, on suppose $g$ et $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec :*

$$g : \begin{array}{ccl} \Omega & \to & U \\ t = (t_1, \ldots, t_q) & \mapsto & g(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t)) \end{array}$$

$$f : \begin{array}{ccl} U & \to & \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \end{array}$$

*On a :*

$$\frac{\partial f_i \circ g}{\partial t_j}(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial t_j}(t) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial g_k}(g(t))$$

### 2.4 Matrice jacobienne

Soit $f : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R}^p \\ x & \mapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = \left( \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}, \dots, \dfrac{\partial f_p}{\partial x_j} \right)$

**Définition 8** *Pour $x \in U$, on appelle matrice jacobienne de $f$ en $x$ la matrice à $p$ lignes et $n$ colonnes :*

$$\mathcal{J}_f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

**Définition 9 (jacobien)** *On suppose $p = n$.*
*On appelle Jacobien de $f$ en $x \in U$, le déterminant de la matrice jacobienne de $f$ en $x$, $j_f(x) = \det(\mathcal{J}_f(x))$, on note :*

$$\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(x) = \det(\mathcal{J}_f(x))$$

**Théorème 4**
*Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^q$ et $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g : \Omega \to U$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$, et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$.*
*On a : $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega$ et $\mathcal{J}_{f \circ g}(x) = \mathcal{J}_f(g(x)) \times \mathcal{J}_g(x)$*

## 3 Applications continûment différentiables

### 3.1 Définition

**Définition 10** *$f : U \to \mathbb{R}^p$, $a \in U$, On dit que $f$ est différentiable en $a$ si Il existe une application linéaire $L_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ telle que $\forall h \in \mathbb{R}^n$, tel que $a + h \in U$, $\quad f(a+h) = f(a) + L_a(h) + o(h)$.*

**Proposition 8** *Si $f$ est différentiable en $a$ alors $f$ admet en $a$ une dérivée suivant tout vecteur non-nul $v$ de $\mathbb{R}^n$.*

**Proposition 9** *Si $f$ est différentiable en $a$ Alors l'application linéaire $L_a$ est unique.*
*Elle est appelée différentielle de $f$ en $a$ et notée $\mathrm{d}f_a$*
*$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + o(h)$ et pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{df_a}(v) = D_v f(a)$*

**Proposition 10** *si $f$ est différentiable en $a$ alors $f$ admet des dérivées partielles en $a$ et $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $\mathrm{df_a}(e_j) = D_j f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, on a alors : $\mathrm{d}f_a(h) = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$*

**Proposition 11** *$f$ est différentiable en $a \in U$ si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f_i$ est différentiable en $a$*
*Si $f$ est différentiable en $a$ alors $\mathrm{d}f = (\mathrm{d}f_1, \dots, \mathrm{d}f_p)$ et $\forall (i,j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$, $(\mathrm{D_j} f)_i(a) = \mathrm{D_j}(f_i)(a)$*

Notations : Pour $p = 1$
En calcul différentiel, on note $(\mathrm{d}x_j)_{1 \leq j \leq n}$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}x_j : h \mapsto h_j$ (remarque : $\mathrm{d}x_j$ est la différentielle de la forme linéaire : $x \mapsto x_j$ ) et on a alors

$$\mathrm{d}f_a = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \mathrm{d}x_j$$

**Proposition 12** *Si $f$ est différentiable en $a$ Alors la matrice de $\mathrm{d}f_a$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ est la matrice jacobienne de $f$ en $a$, $M_{\mathrm{d}f_a} = \left( \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ si $f = (f_1, \dots, f_p)$.*

**Théorème 5** *Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ Alors $f$ est différentiable sur $U$*
*On dit que $f$ est continûment diffentiable sur $U$.*

## 3.2 Propriétés

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^q$, $f : U \to \mathbb{R}^p$, $g : U \to \mathbb{R}^p$, $h : \Omega \to U$, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ et $\theta : I \to U$, cinq fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. On a pour $\lambda \in \mathbb{R},\ a \in U,\ b \in \Omega,\ t \in I$ :

$\mathbf{P}_1$ : $\mathrm{d}(\lambda.f)_a = \lambda \cdot \mathrm{d}f_a$

$\mathbf{P}_2$ : $\mathrm{d}(f+g)_a = \mathrm{d}f_a + \mathrm{d}g_a$

$\mathbf{P}_3$ : $\mathrm{d}(f \circ h)_b = \mathrm{d}f_{h(b)} \circ \mathrm{d}h_b$

$\mathbf{P}_4$ : Si $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ Alors $\forall x \in \mathbb{R}^p,\ \mathrm{d}u_x = u$ et $\mathrm{d}(u \circ f)_a = u \circ \mathrm{d}f_a$

$\mathbf{P}_5$ : Si $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)$ Alors $\mathrm{d}(f \circ v)_a = \mathrm{d}f_{v(a)} \circ v$

$\mathbf{P}_6$ : $\mathrm{d}(\varphi.f)_a = \mathrm{d}\varphi_a.f(a) + \varphi(a).\mathrm{d}f_a$

$\mathbf{P}_7$ : $(f \circ \theta)'(t) = \mathrm{d}f_{\theta(t)}(\theta'(t))$

## 3.3 Gradient

**Définition 11**
*Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on appelle gradient de $f$ en $a \in U$ le vecteur* $\mathrm{grad} f(a) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$

**Proposition 13**
*Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{R}^n$ est rapporté à son produit scalaire usuel alors pour $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ :*

$$\mathrm{d}f_a(h) = <\mathrm{grad} f(a), h>$$

**Remarque 2** $<\mathrm{grad} f(a), h> = \mathrm{d}f_a(h) = \mathrm{D}f_h(a)$.

## 3.4 Difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^1$

**Définition 12**
*Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $V$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to V$ :*
*$f$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $U$ sur $V$ si*
- *$f$ est bijective de $U$ sur $V$*
- *$f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$*
- *$f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $V$.*

**Théorème 6**
*Si $f$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert $V$ de $\mathbb{R}^p$ Alors $p = n$.*

**Proposition 14**
*Soit $f$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert $V$ de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $b = f(a)$, on a :*
1. $\mathrm{d}f^{-1}(b) = (\mathrm{d}f(a))^{-1}$
2. $\mathcal{J}_{f^{-1}}(b) = (\mathcal{J}_f(a))^{-1}$

**Proposition 15** *Si $f$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de l'ouvert $U$ de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert $V$ de $\mathbb{R}^n$ alors le jacobien de $f$ ne s'annule pas sur $U$.*

On a une réciproque sous la forme suivante :

**Théorème 7**
**Si**
1. *$U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$*
2. *$f : U \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$, on pose $V = f(U)$*
3. *$f$ est injective*
4. *Le jacobien de $f$ ne s'annule pas sur $U$*

**Alors**
1. *$V$ est ouvert*
2. *$f$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $U$ sur $V$*

les difféomorphismes de classe $\mathcal{C}^1$ permettent de faire des changements de variables dans les équations différentielles aux dérivées partielles et dans les intégrales multiples.

### 3.5 Coordonnées polaires

On considère le plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on pose $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2$ et $\vec{v}(\theta) = -\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2$. Pour $M \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}(\theta)$ avec $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $(\rho, \theta)$ est un système de coordonnées polaires du point $M$ et $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est le repère polaire associé à $M$. Pour $M \in \mathbb{R}^2$, $M \neq O$ il existe un unique système de coordonnées polaires de $M$ tel que $(\rho, \theta) \in ]0, +\infty[\times] - \pi, \pi]$, $\theta$ est la mesure principale de l'angle $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM})$ et $\rho$ est la distance $OM$.

**Proposition 16**
*L'application :* $\begin{array}{ccc} ]0, +\infty[\times] - \pi, +\pi[ & \to & \mathbb{C} \backslash \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\} \\ (\rho, \theta) & \mapsto & \rho e^{i\theta} \end{array}$ *est un* $\mathcal{C}^1$ *difféomorphisme.*

**Remarque 3** $\varphi^{-1}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, 2\arctan\left(\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right))$

Pour $z \in C^*$, $z = \rho e^{i\theta}$, $(\rho, \theta) \in ]0, +\infty[\times] - \pi, \pi]$, $\theta$ est la mesure principale de l'argument de $z$.

### 3.6 Accroissements finis

On considère l'espace vectoriel euclidien usuel $(\mathbb{R}^n, < \, , \, >)$ .

**Théorème 8**
**Si**

1. *$U$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$*
2. *$f : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$.*
3. $\exists M \geq 0,\ \forall x \in U,\ \| \operatorname{grad} f(x) \| \leq M$

**Alors** $\forall (x, y) \in U^2,\ | f(x) - f(y) | \leq M \| x - y \|$ *($f$ est lipschitzienne sur $U$)*

**Proposition 17** *Soit $U$ un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ : $f$ est constante sur $U$ si et seulement si* $\forall x \in U,\ \operatorname{grad} f(x) = 0$

**Proposition 18** *Soit $U$ un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$ : $f$ est constante sur $U$ si et seulement si* $\forall x \in U,\ \mathrm{d}f_x = 0$

# 4 Dérivées partielles d'ordre supérieur

### 4.1 Définition

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x))$.

**Définition 13**
• *On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $U$ si*
$\forall (i_1, \ldots, i_\alpha) \in \{1, \ldots, n\}^\alpha$, $\alpha \leq k$, $\dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_\alpha}}$ *est définie et continue sur $U$*
• *On dit que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $U$ si $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$,* $\forall k \in \mathbb{N}$.

### 4.2 Propriétés

**Proposition 19**
*$f$ est de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \in \mathbb{N}$ ou $p = \infty$) si et seulement si ses fonctions composantes sont de classe $\mathcal{C}^p$.*

Soit $\mathcal{C}^k(U, F)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $U$ à valeurs dans $F$ ($k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$) :

• $\mathcal{C}^k(U, F)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
• $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.
• Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^q$, $g : \Omega \to U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ avec $f$ et $g$ de classe $\mathcal{C}^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
Alors $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\Omega$

**Théorème 9** *Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ ou $k = \infty$*
**Si**

1. *$U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$*
2. *$f : U \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $U$, on pose $V = f(U)$*
3. *$f$ est injective*
4. *Le jacobien de $f$ ne s'annule pas sur $U$*

**Alors**

1. *$V$ est ouvert*
2. *$f$ est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme de $U$ sur $V$*

**Théorème 10 (Théorème de Schwarz)**

- *Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U$ alors $\forall x \in U$ et $\forall (i_1, i_2) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}(x)$*
- *Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$ ou $k = \infty$ sur $U$ Alors dans les dérivées partielles de $f$ jusqu'à l'ordre $k$, l'ordre de dérivation par rapport aux différentes variables n'intervient pas, on note alors :*
  $\dfrac{\partial^k}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n} f$ *où* $\alpha_1 + \ldots \alpha_n = k$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$.

**Théorème 11 (Formule de taylor)**
**Si**

1. *$U$ est un ouvert de $(\mathbb{R}^2, \| \ \|)$*
2. *$f : U \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U$*
3. *$(x_0, y_0) \in U$, $r > 0$ vérifie $BO((x_0, y_0), r) \subset U$ et $(h, k) \in BO(O, r)$ on pose : $X_0 = (x_0, y_0)$, $H = (h, k)$*

**Alors**

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) + \frac{1}{2}\left(h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0)\right) + o\left(\| (H) \|^2\right)$$

*Que l'on peut aussi écrire*
$Q_{X_0}(H) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + < \mathrm{grad} f(X_0), H > + \frac{1}{2} Q_{X_0}(H) + o(\| H \|^2)$$

# 5 Extréma

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$.

**Définition 14**
- *Soit $a \in U$, on dit que $f$ admet un maximum absolu sur $U$ en $a$ si $\forall x \in U$, $f(x) \leq f(a)$.*
- *Soit $a \in U$, on dit que $f$ admet un minimum absolu sur $U$ en $a$ si $\forall x \in U$, $f(x) \geq f(a)$.*
- *Soit $a \in U$, on dit que $f$ admet un maximum relatif en $a$ si $\exists r > 0$, $\forall x \in BF(a, r)$, $f(x) \leq f(a)$.*
- *Soit $a \in U$, on dit que $f$ admet un minimum relatif en $a$ si $\exists r > 0$, $\forall x \in BF(a, r)$, $f(x) \geq f(a)$.*

**Proposition 20** *Si $f$ admet un maximum ou un minimum relatif en $a \in U$ Alors* $\mathrm{grad} f(a) = 0$

**Définition 15**
*Pour $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $a \in U$ et est un point critique de $f$ si* $\mathrm{grad} f(a) = 0$
*Pour $f : U \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$, $a \in U$ et est un point critique de $f$ si* $\mathrm{d}f_a = 0$.

***Proposition 21***
*Si $K \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble compact et $f : K \to \mathbb{R}$ est continue sur $K$ alors $f$ admet un maximum et un minimum absolu sur $K$.*

**Théorème 12 (condition suffisante d'extrémum)**
**Si**

1. *$U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$*
2. *$A = (a, b) \in U$ est un point critique de $U$*
3. *On note : $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x_0, y_0)$ (notations de Monge)*

**Alors**

1. *$rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ $\Rightarrow$ $f$ a un minimum local en $A$*
2. *$rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ $\Rightarrow$ $f$ a un maximum local en $A$*
3. *$rt - s^2 < 0$ et $\Rightarrow$ $f$ n'a pas d'extrémum en $A$*