Endomorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3

—

1 Endomorphismes orthogonaux du Plan

Soit $\vec{P}$ un plan vectoriel euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$.
Soit $O(\vec{P})$ le groupe des endomorphismes orthogonaux,
$SO(\vec{P})$ le sous-groupe des rotations et $SO^-(\vec{P})$ l'ensemble des isométries vectorielles négatives.
$SO(\vec{P}) = \{f \in O(\vec{P}),\ \det(f) = 1\}$, $SO^-(\vec{P}) = \{f \in O(\vec{P}),\ \det(f) = -1\}$

1.1 Rotations

Soit $f \in L(\vec{P})$, $f \in SO(\vec{P})$ si et seulement si la matrice de f dans $(\vec{i}, \vec{j})$ est de la forme :

$R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 + b^2 = 1$.

Il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que : $a = \cos\theta,\ b = \sin\theta,\ f$ a pour matrice : $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

f est la rotation d'angle de mesure principale θ
Si $\theta = 0$ alors $f = \mathrm{Id}$ et si $\theta = \pi$ alors $f = -\mathrm{Id}$

1.2 Réflexions

Soit $f \in L(\vec{P})$, $f \in SO^-(\vec{P})$ si et seulement si la matrice de f dans $(\vec{i}, \vec{j})$ est de la forme :

$S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 + b^2 = 1$.

Il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que : $a = \cos\theta,\ b = \sin\theta,\ f$ a pour matrice : $S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

f est alors la réflexion par rapport à la droite $\vec{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ avec $\mathrm{mes}(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = \dfrac{\theta}{2}$

Proposition 1
Soit $r \in SO(\vec{P})$ une rotation d'angle de mesure θ, $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires avec $\mathrm{mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\theta}{2}$ et $s_{\vec{u}}$ (resp. $s_{\vec{v}}$) la réflexion par rapport à la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ (resp. $\vec{v}$). On a :

$$r = s_{\vec{v}} \circ s_{\vec{u}}$$

L'ensemble des réflexions engendre $O(\vec{P})$

1.3 Matrice orthogonales

$M \in M_2(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ${}^tMM = I_2$ où I_2 est la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.

Proposition 2 $M \in M_2(\mathbb{R})$ *est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme f de matrice M dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est un endomorphisme orthogonal.*

Soit $O_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales : $O_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
Groupe spécial orthogonal : c'est le sous-groupe de $O_2(\mathbb{R})$ des matrices des rotations :

$$SO_2(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a^2 + b^2 = 1\}$$

Si $M \in SO_2(\mathbb{R}),\ \det M = 1$

On définit aussi :

$$SO_2^-(\mathbb{R}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),\ (a, b) \in \mathbb{R}^2, a^2 + b^2 = 1\}$$

Si $M \in SO_2^-(\mathbb{R}),\ \det M = -1$

2 Endomorphismes orthogonaux de l'Espace

Soit $\vec{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 orienté rapporté à une base orthonormée directe $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $O(\vec{E})$ le groupe des endomorphismes orthogonaux,
$SO(\vec{E})$ le sous-groupe des rotations et $SO^-(\vec{E})$ l'ensemble des isométries vectorielles négatives.
$SO(\vec{E}) = \{f \in O(\vec{E}),\ \det(f) = 1\}$, $SO^-(\vec{E}) = \{f \in O(\vec{E}),\ \det(f) = -1\}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\vec{E})$ de matrice M dans la base $\mathcal{B}_0$. $M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 3}}$ et soit C_1, C_2, C_3 les vecteurs colonnes de M, $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}$ pour $j \in \{1, 2, 3\}$

2.1 Rotations

$f \in SO(\vec{E})$ si et seulement si $\left(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})\right)$ est une base orthonormée directe de $\vec{E}$

$f \in SO(\vec{E})$ si et seulement si ${}^tC_1C_1 ={}^t C_2C_2 = 1,\ {}^tC_1C_2 = 0$ et $C_1 \wedge C_2 = C_3$.

- Si ${}^tM = M$ Alors $f = \mathrm{id}_{\vec{E}}$ ou f est un demi-tour d'axe $\vec{D}$ (rotation d'angle plat) et $\vec{u}\begin{pmatrix} a_{11}+1 \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\vec{D}$

  Dans une base orthonormée adaptée à $\vec{E} = \vec{D} \oplus \vec{D}^{\perp}$ f admet la matrice réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Si ${}^tM \neq M$ et $M - {}^tM = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$

  alors f est la rotation d'axe $\vec{D}$ orienté par le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

  et d'angle de mesure principale $\theta \in]0, \pi[$ avec $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr} M$

  Dans une base orthonormée directe adaptée à $\vec{E} = \vec{D} \oplus \vec{D}^{\perp}$

  f admet la matrice réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2.2 Eléments de $SO^-(\vec{E})$

$f \in SO^-(\vec{E})$ si et seulement si $\left(f(\vec{i}), f(\vec{j}), f(\vec{k})\right)$ est une base orthonormée indirecte de $\vec{E}$
($SO^-(\vec{E})$ se note aussi $O^-(\vec{E})$)
$f \in SO^-(\vec{E})$ si et seulement si ${}^tC_1C_1 ={}^t C_2C_2 = 1,\ {}^tC_1C_2 = 0$ et $C_1 \wedge C_2 = -C_3$.

2.2.1 Réflexion

Si ${}^tM = M$ Alors f est la réflexion par rapport au plan $\vec{P}$ d'équation $(a_{11} - 1)x + a_{12}y + a_{13}z = 0$
Dans une base orthonormée adaptée à $\vec{E} = \vec{P} \oplus \vec{P}^{\perp}$
f admet la matrice réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
L'ensemble des réflexions engendre $O(\vec{E})$

2.2.2 Symétries gauches

Si ${}^tM \neq M$ Alors f est une symétrie gauche c'est à dire que $-f$ est une rotation d'axe $\vec{D}$, f admet alors une décomposition unique de la forme : $f = r_\theta \circ s_{\vec{P}} = s_{\vec{P}} \circ r_\theta$ avec $\vec{P} = \vec{D}^{\perp}$, $s_{\vec{P}}$ est la réflexion par rapport au plan $\vec{P}$ et r_θ est une rotation d'axe $\vec{D}$ (l'angle de $-f$ est égal à $\widehat{\theta} + p$ où p est l'angle plat et $\widehat{\theta}$ est l'angle de r_θ).
Dans une base orthonormée directe adaptée à $\vec{E} = \vec{D} \oplus \vec{P}$ f admet la matrice réduite : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

où θ est une mesure de l'angle de f pour une orientation de $\vec{D}$.