INTEGRATION sur un segment

***I** désigne un intervalle,* $(a,b)\in \boldsymbol{I}^2$.

I-PRIMITIVES

<u>Définition</u> : Soit $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{F}$ deux fonctions numériques définies sur $\boldsymbol{I}$.
est une primitive de $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{I}$ **ssi** $\boldsymbol{F}$ est dérivable sur $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{F'(x)=f(x)}$ $\forall \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{I}$.

<u>Proposition</u> : * Si $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ sont deux primitives d'une fonction $\boldsymbol{f}$ sur un intervalle $\boldsymbol{I}$
Alors $\exists\, \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}$ tel que $\forall \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{I}$ $\boldsymbol{F(x)=G(x)+k}$.

*Si $\boldsymbol{F}$ est une primitive de $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{I}$, les primitives de $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{I}$ sont les fonctions $\boldsymbol{G}$ de la forme $\boldsymbol{G(x)=F(x)+k}$ $\forall \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{I}$ où $\boldsymbol{k}\in\mathbb{R}$.

<u>Corollaire</u> : Si $\boldsymbol{f}$ admet une primitive sur un intervalle $\boldsymbol{I}$, pour $(x_0, y_0)\in I\times\mathbb{R}$, il existe une unique primitive $\boldsymbol{F}$ de $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{I}$ telle que $F(x_0)=y_0$

<u>Théorème</u> :Si $\boldsymbol{f}$ est une fonction continue sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ **Alors** $\boldsymbol{f}$ admet une primitive sur $\boldsymbol{I}$ (et donc une infinité.)

II-INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

<u>Définition</u> : Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et $\boldsymbol{F}$ une primitive de $\boldsymbol{f}$ sur $[a,b]$.
On appelle intégrale de $\boldsymbol{f}$ de a à b le réel $\boldsymbol{F}(b)$-$\boldsymbol{F}(a)$ (il est indépendant de $\boldsymbol{F}$).
On note : $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

<u>Proposition</u> : Soit $\boldsymbol{f}$ continue sur $\boldsymbol{I}$, pour $a\in\boldsymbol{I}$ la fonction $\boldsymbol{F_a}$ définie sur $\boldsymbol{I}$ par $F_a(x)=\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de $\boldsymbol{f}$ qui s'annule en a. En particulier la fonction $\boldsymbol{F_a}$ est de classe $\boldsymbol{C^1}$ sur $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{F_a'=f}$.

<u>Propriétés</u> : Soient $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions <u>continues</u> définies sur $\boldsymbol{I}$, $(a,b,c)\in\boldsymbol{I}^3$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

- $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
- <u>Linéarité</u> : $\int_a^b[\alpha.f(x)+\beta.g(x)].dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$
- <u>Relation de Chasles</u> : $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$
- <u>Positivité de l'intégrale</u> : Si $a\leq b$ et $\forall \boldsymbol{x}\in[a,b]$ $\boldsymbol{f(x)}\geq 0$ Alors $\int_a^b f(x).dx\geq 0$

<u>Conséquences</u>: 1) Si $a\leq b$ et $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\leq g(x)$ Alors $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

2) Si $a<b$ et $\forall \boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ $f(x)\geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx=0\Rightarrow f(x)=0\,\forall x\in[a,b]$

3) Si $a\leq b$ alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b|f(x)|dx\leq(b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$

III-CALCULS D'INTEGRALES

Intégration par parties: Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ de classe $\boldsymbol{C^1}$ sur $[a,b]$ alors $\int_a^b u'(x)v(x)dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)v'(x)dx$

Changement de variable: Soit $\boldsymbol{f}$ continue sur $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{u}$ une fonction de classe $\boldsymbol{C^1}$ sur un intervalle d'extrémités α et β à valeurs dans $\boldsymbol{I}$ Alors $\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[u(t)].u'(t)dt$

IV-SOMMES DE RIEMANN

Définition 1: Soit f une fonction numérique continue sur le segment $[a,b]$, $a<b$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel $\frac{1}{b-a}.\int_a^b f(t)dt$

Définition 2: Soit f une fonction numérique continue sur le segment $[a,b]$, $a<b$.

On appelle sommes de Riemann attachées à f les suites (s_n) et (t_n) définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k.\frac{b-a}{n}) \quad et \quad t_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a+k.\frac{b-a}{n}).$$

remarque: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n - s_n = \frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)]$

Théorème:Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.

Les suites (s_n) et (t_n) des sommes de Riemann de f sont convergentes et ont pour limite commune $\int_a^b f(t)dt$.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}.\sum_{j=1}^{n} f(a+j\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(t)dt$$

remarque: Si f est monotone alors les suites (s_n) et (t_n) sont adjacentes et ont pour limite commune $\int_a^b f(t)dt$.

V-FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

Définition:

Soit f une fonction numérique définie sur le segment $[a,b]$.On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si f n'admet qu'un nombre fini de points de discontinuité sur $[a,b]$.et si f admet une limite à droite et une limite à gauche en chacun de ces points.

Pour f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ avec $a_0=a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n=b$ les points de discontinuité de f.
On notera f_k le prolongement par continuité de f sur $[a_k,a_{k+1}]$ pour $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$.

Définition:

Soit f une fonction numérique définie sur le segment $[a,b]$. f est une fonction en escalier sur $[a,b]$ si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ avec pour tout $k \in \{0,1,\cdots,n-1\}$, f_k constante sur $[a_k,a_{k+1}]$

Définition:

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ avec $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ les points de discontinuité de f et f_k le prolongement par continuité de f sur $[a_k,a_{k+1}]$. On définit l'intégrale de a à b de f par: $\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(t)dt$

Propriétés : Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I, $(a,b,c)\in I^3$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.
(on dit que f est continue par morceaux sur un intervalle I ssi f est continue par morceaux sur tout $[a,b]\subset I$)

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Linéarité : $\int_a^b [\alpha.f(x)+\beta.g(x)].dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- Positivité de l'intégrale : Si $a\leq b$ et $\forall x\in[a,b]$ $f(x)\geq 0$ Alors $\int_a^b f(x).dx \geq 0$

Si $a \leq b$ et $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ et $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$

Proposition: Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors $F :[a,b] \to \mathrm{R}$ est définie et continue sur $[a,b]$.

$$x \to \int_a^x f(t)dt$$

de plus* F est dérivable en tout point x où f est continue et $F'(x)=f(x)$.

* En un point x où f n'est pas continue: $F'_d(x) = \lim_{t\to x^+} f(t)$ et $F'_g(x) = \lim_{t\to x^-} f(t)$