Devoir libre n°1

Exercice 1 (algèbre linéaire)
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs

$$u = (1, 1, -1),\ v = (-1, 1, 1),\ w = (1, -1, 1)$$

1. *Montrer que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$*
2. *Donner les coordonnées du vecteur $(2, 1, 3)$ dans cette base.*

Exercice 2 (algèbre linéaire) *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Quel est le rang de A ?*
2. *Déterminer une base de $\ker f$, le noyau de f.*
3. *Déterminer une équation et une base de $\mathrm{Im} f$, l'image de f.*
4. *On considère les vecteurs $u = (4, -1, -3)$, $v = (1, -1, 0)$, $w = (0, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$*
   a) *Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$*
   b) *Déterminer la matrice de f dans la base (u, v, w).*

Exercice 3 (probabilités)
Deux joueurs A et B disposent chacun d'un tas de n pièces qu'ils arrangent comme ils le souhaitent.
Ils jouent de la façon suivante : chacun présente la première pièce du tas :
- *Pour FF (Face-Face) A donne 9 euros à B*
- *Pour PP (Pile-Pile) A donne 1 euros à B*
- *Pour PF ou FP B donne 5 euros à A*

Ensuite ils recommencent avec la pièce suivante.
On note x la proportion de pièces "Face" de A ($x = \dfrac{n_F}{n}$ où n_F est le nombre de pièces que A a placé présentant "Face") et m la proportion de pièces "Face" de B.

Existe-t-il pour l'un des joueurs une stratégie gagnante indépendante du jeu de l'adversaire ? Si oui laquelle ? On précisera alors la valeur de x ou de m correspondante et l'espérance de gain correspondante.

Exercice 4 (analyse : étude de fonction, suite-équivalent)

1. *Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + nx - 1 = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$, on notera u_n cette solution .*
2. *Montrer que $\forall n \geq 1,\ u_n \leq \dfrac{1}{n}$, en déduire la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.*
3. *Montrer que $(u_n)_n$ est décroissante*
4. *Déterminer un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$*

Exercice 5 (Analyse : développement limité)

1. *On considère $f(x) = \ln(1 + e^{-\frac{1}{x^2}})$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un $DL_n(0)$ que l'on déterminera.*
2. *Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le $DL_{n+1}(0)$ de $f(x) = \ln(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!})$.*

Problème I

Soit $k > 0$ un entier fixé et les fonctions f_k et g_k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k : x \mapsto \arctan(x + k\pi) \text{ et } g_k(x) = f_k(x) - x.$$

1. Calculer $f_k'(x)$ et montrer que $\forall x > 0$, $0 < f_k'(x) \leqslant \delta_k < 1$ pour une constante δ_k à calculer en fonction de k.

2. Etudier les variations de g_k sur $[0,+\infty[$. En déduire l'existence d'un unique réel $\theta_k \in [0, \frac{\pi}{2}[$ solution de l'équation $\theta_k = f_k(\theta_k)$.
3. On définit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_n = f_k(u_{n-1})$.
   a) Montrer que $0 \leqslant \theta_k - u_n \leqslant \delta_k(\theta_k - u_{n-1})$.
   b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \theta_k$.
   c) Pour $k = 1$, déterminer n pour que $\theta_1 - u_n < 10^{-15}$.
4. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \theta_k = \frac{\pi}{2}$ (comparer $f_k(0)$ et θ_k).
5. Montrer que $\forall x > 0$, $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire que si on pose $\tau_k = \frac{\pi}{2} - \theta_k$, alors $\arctan\left(\frac{1}{(k+\frac{1}{2})\pi}\right) \leqslant \tau_k \leqslant \arctan\left(\frac{1}{k\pi}\right)$.
6. Donner un équivalent de τ_k lorsque k tend vers $+\infty$ (s'exprimant simplement en fonction de k)

Problème II

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= \dfrac{x^2}{e^x - 1} \text{ pour x} > 0 \end{cases}$

Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité 2cm)

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty]$ par $g(x) = (-x+2)e^x - 2$ pour tout réel x positif ou nul.

1. Calculer la limite de g en $+\infty$
2. Etudier les variations de la fonction g sur $[0,+\infty[$. (On précisera $g(0)$).
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle , notée α.
4. Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$ et montrer que $1 < \alpha < 2$. On donne $e = 2,7 \pm 0,1$.

Partie B

1. Rappeler $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.
2. En déduire que f est continue et dérivable en 0. Préciser une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$, et donner une interprétation graphique de cette limite.
5. a) Pour $x > 0$, montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
   b) En déduire le tableau de variation de f, en y faisant apparaître le réel α défini dans la Partie A.
   c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$, où α est défini dans la partie A.
6. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ en y plaçant les tangentes aux points d'abscisses 0 et α. On donne $\alpha = 1,6 \pm 0,1$.

Partie C

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$

1. a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leq 1$.
   b) Montrer que la suite est décroissante (on utilisera un raisonnement par récurrence).
   c) En déduire que la suite est convergente (sa limite est étudiée dans les questions suivantes).
2. En utilisant la continuité de f, montrer que la limite de la suite est solution de l'équation (E) : $\begin{cases} f(x) = x \\ x \in [0,+\infty[\end{cases}$
3. L'équation (E) a une solution évidente : le nombre 0. On se propose de rechercher s'il existe d'autres solutions à cette équation.
   a) Montrer que dans $]0,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $e^x - x - 1 = 0$.
   b) Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x) = e^x - x - 1$.
   c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]0,+\infty[$.
4. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.