Devoir libre n°1
Indications pour une correction

Problème I

Préliminaires

1. $O \in \mathcal{R}(O)$ et $I \in \mathcal{R}(I)$ de sorte que $\mathcal{R}(O) \neq \varnothing$ et $\mathcal{R}(I) \neq \varnothing$
2. $J^2 = O, \quad H^2 = J, \quad H^3 = O$
3. **Remarque 1** *Pour* $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}), \quad P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $(P^{-1}MP)^n = P^{-1}M^nP$
   Si $\mathcal{R}(A) \neq \varnothing$ alors $\exists B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),\ B^2 = A$ on a alors $(P^{-1}BP)^2 = P^{-1}B^2P = P^{-1}AP$ de sorte que $P^{-1}BP \in \mathcal{R}(P^{-1}AP)$ d'où
   $$\mathcal{R}(A) \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{R}(P^{-1}AP) \neq \varnothing$$
   Si $A' = P^{-1}AP$ alors $A = PA'P^{-1}$ on montre alors comme précédemment :
   $$\mathcal{R}(P^{-1}AP) \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{R}(A) \neq \varnothing$$
   d'où l'équivalence demandée :
   $$\mathcal{R}(P^{-1}AP) \neq \varnothing \Leftrightarrow \mathcal{R}(A) \neq \varnothing$$
4. a) $N^p = O$ donc $\det N^p = 0$ d'où $(\det N)^p = 0$ soit $\det N = 0$ de sorte que N n'est pas inversible, par suite l'endomorphisme g n'est pas bijectif et $\ker g \neq \{\vec{0}\}$ d'où $\dim \ker g \geq 1$
   b) Soit $i \in \mathbb{N}^*$, pour $\vec{x} \in \ker g^i$, $g^i(\vec{x}) = \vec{0}$ on en déduit que $g(g^i(\vec{x})) = \vec{0}$ soit que $g^{i+1}(\vec{\vec{x}}) = \vec{0}$, d'où $\vec{x} \in \ker g^{i+1}$ et par suite $\ker g^i \subset \ker g^{i+1}$
   c) Si $j \in \mathbb{N}^*$ et $\ker g^j = \ker g^{j+1}$, montrons par récurrence que pour $k \geq j$ on a $\mathcal{P}_k$: $\ker g^k = \ker g^j$
   La propriété $\mathcal{P}_k$ est vrai pour $k = j$ et $k = j+1$
   Supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie au rang k pour $k \geq j$, au rang $k+1$ on a :
   $\ker g^k = \ker g^j$ et $\ker g^k \subset \ker g^{k+1}$ d'après 4.b soit $\ker g^j \subset \ker g^{k+1}$
   Soit $\vec{x} \in \ker g^{k+1}$, on a alors $g(\vec{x}) \in \ker g^k$, avec l'hypothèse de récurrence on en déduit que $g(\vec{x}) \in \ker g^j$ par suite $\vec{x} \in \ker g^{j+1}$ or par hypothèse $\ker g^{j+1} = \ker g^j$ de sorte que $\vec{x} \in \ker g^j$, par conséquent $\ker g^{k+1} \subset \ker g^j$ et $\ker g^{k+1} = \ker g^j$ d'où $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
   D'où
   $$\ker g^j = \ker g^{j+1} \Rightarrow \forall k \geq j,\ \ker g^k = \ker g^j$$
   d) D'après 4.b la suite $(\ker g^i)_{1 \leq i \leq p}$ est croissante pour l'inclusion. S'il existe $i < p$ tel que $\ker g^i = \ker g^{i+1}$ alors avec 4.*c* on a $\ker g^i = \ker g^{p-1} = \ker g^p = \mathbb{K}^3$ car $g^p = 0$ et par suite $g^{p-1} = 0$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $N^{p-1} \neq O$ de sorte que la suite finie $(\ker g^i)_{1 \leq i \leq p}$ est strictement croissante.
   e) Comme $(\ker g^i)_{1 \leq i \leq p}$ est strictement croissante on en déduit que $(\dim \ker g^i)_{1 \leq i \leq p}$ est une suite d'entiers strictement croissante avec $\forall i \in [\![1, p]\!],\ 1 \leq \dim \ker g^i \leq 3$ puisque $\dim \ker g \geq 1$ d'après 4.a par suite $p \leq 3$.

Partie A

1. Si $B \in \mathcal{R}(I)$ et $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ alors $B^2 = I$ soit $P^{-1}B^2P = P^{-1}P$, d'où $(P^{-1}BP)^2 = I$ soit $P^{-1}BP \in \mathcal{R}(I)$
2. Si $B \in \mathcal{R}(I)$ alors $B^2 = I$ de sorte que B est inversible et $B^{-1} = B$ d'où $B^{-1} \in \mathcal{R}(I)$
3. a) On a $(U, V) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})^2$, en effectuant le produit matriciel on vérifie que $U^2 = I$ et $V^2 = I$ de sorte que $(U, V) \in \mathcal{R}(I)^2$
   b) On a $UV = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $(UV)^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ soit $UV \notin \mathcal{R}(I)$ par suite $(\mathcal{R}(I), \times)$ n'est pas un groupe car $\times$ n'est pas une loi interne dans $\mathcal{R}(I)$

Partie B

Remarque 2 *Si $M \in \mathcal{R}(O)$ avec $M = O$ alors $\mathcal{R}(M) \neq \varnothing$ d'après* **Préliminaires 1.**, *dans la suite nous supposerons $M \in \mathcal{R}(O)$ avec $M \neq O$*

1. $M^2 = O$ donc $f^2 = 0$ par suite $f(f(\mathbb{K}^3)) = \{\vec{0}\}$ soit $f(\mathrm{Im} f) = \{\vec{0}\}$ d'où $\mathrm{Im} f \subset \ker f$
   D'après le théorème du rang $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim \mathbb{K}^3$ avec $\dim \ker f \geq 1$ d'après **Préliminaires 4.a)** avec $N = M$ et $p = 2$, d'autre part d'après la question précédente $\dim \mathrm{Im} f \leq \dim \ker f$ et comme $f \neq 0$ on a $\dim \mathrm{Imf} \geq 1$, par suite on a :
   $$\begin{array}{rcl} \dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f & = & 3 \\ 2 \dim \mathrm{Im} f & \leq & 3 \\ 1 \leq \dim \mathrm{Imf} & \leq & \dfrac{3}{2} \end{array}$$
   par suite $\dim \mathrm{Im} f = 1$ soit $\mathrm{rg} f = 1$ et $\mathrm{rg} M = 1$

   Remarque 3 *On en déduit aussi que* $\dim \ker f = 2$
2. Si $\vec{x} \notin \ker f$ alors $f(\vec{x}) \neq \vec{0}$, montrons que $(f(\vec{x}), \vec{x})$ est libre :
   Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\alpha f(\vec{x}) + \beta \vec{x} = \vec{0}$, on a alors :
   $$\begin{array}{rcl} \alpha f(\vec{x}) + \beta \vec{x} & = & \vec{0} \\ \alpha f^2(\vec{x}) + \beta f(\vec{x}) & = & f(\vec{0}) \\ \beta f(\vec{x}) & = & \vec{0} \end{array}$$
   , comme $f(\vec{x}) \neq \vec{0}$ il vient $\beta = 0$ et par suite $\alpha = 0$, d'où

   $\alpha f(\vec{x}) + \beta \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ de sorte que $(f(\vec{x}), \vec{x})$ est libre.
3. $\mathrm{Im} f \subset \ker f$, soit $\vec{e}_1 \in \mathrm{Im} f$ avec $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$, $(\vec{e}_1)$ est alors une base de $\mathrm{Im} f$, on utilise le théorème de la base incomplète, soit $\vec{e}_2$ tel que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ soit une base de $\ker f$. Soit maintenant $\vec{e}_3 \in \mathbb{K}^3$ tel que $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1$. Montrons que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est libre, comme $\dim \mathbb{K}^3 = 3$ on en déduira que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{K}^3$ répondant à la question.
   Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma \vec{e}_3 = \vec{0}$, en appliquant f aux deux membres de l'égalité il vient :
   $\gamma \vec{e}_1 = \vec{0}$, comme $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$ il vient $\gamma = 0$, ensuite en utilisant que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est libre il vient $\alpha = \beta = 0$, par suite $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{K}^3$.
4. Dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$ f a pour matrice M et dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ f a pour matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, si Q désigne la matrice de changement de base de la base canonique à la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$
   on a : $J = Q^{-1} M Q$ et en posant $P = Q^{-1}$ on a alors $M = P^{-1} J P$
5. D'après **Préliminaires 2.** on a $H^2 = J$ de sorte que $\mathcal{R}(J) \neq \varnothing$ et avec **Préliminaires 3.** on en déduit que $\mathcal{R}(P^{-1} J P) \neq \varnothing$ d'où d'après la question précédente $\mathcal{R}(M) \neq \varnothing$

Partie C

On a $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ avec $M^2 \neq O$ et $M^3 = O$

1. Si $N \in \mathcal{R}(M)$ alors $N^2 = M$ donc $N^4 = M^2$ et $N^6 = M^3$ soit $N^4 \neq O$ et $N^6 = O$
2. D'après la question précédente il existe un entier p tel que $N^{p-1} \neq O$ et $N^p = O$ et on a $4 \leq p \leq 6$ ce qui est contradictoire avec la question **Préliminaires 4.** où $p \leq 3$ de sorte que $\mathcal{R}(M) = \varnothing$
3. D'après **Préliminaires 2.** on a $H^2 \neq O$ et $H^3 = O$ les deux questions précédentes donnent alors $\mathcal{R}(H) = \varnothing$

Partie D

On a $M \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$, $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{K})$ et $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure telle que $M = P^{-1} T P$.

1. $M = P^{-1} T P$ de sorte que M et T sont semblables elles ont donc même rang, comme M est inversible on a T est aussi inversible
2. a, b, c sont trois complexes non-nuls, ils possèdent respectivement chacuns deux racines carrées distinctes qui sont opposées, soit a', b', c' tels que ${a'}^2 = a$, ${b'}^2 = b$, ${c'}^2 = c$ si parmi a, b, c deux ou trois des nombres sont égaux on choisit alors la même racine carrée (qui est non-nulle) de sorte que on a bien :
   $${a'}^2 = a,\ {b'}^2 = b,\ {c'}^2 = c \text{ et } (a' + b')(b' + c')(c' + a') \neq 0$$

3. a) Posons $T = \begin{pmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ et $T' = \begin{pmatrix} x & t & v \\ 0 & y & u \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ on a ${T'}^2 = T$ si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 & = & a \\ y^2 & = & b \\ z^2 & = & c \\ t(x+y) & = & d \\ u(y+z) & = & e \\ (x+z)v + tu & = & f \end{cases}$$

il suffit de montrer que ce système possède au moins une solution. En utilisant la question précédente il existe trois nombres complexes x, y, z tels que $x^2 = a$, $y^2 = b$, $z^2 = c$ et $(x+y)(y+z)(z+x) \neq 0$, comme $x+y \neq 0$, $y+z \neq 0$, $x+z \neq 0$ on détermine alors t, u, v tel que $(x, y, z, t, u, v) \in \mathbb{C}^6$ soit solution du système ce qui montre l'existence de T' tel que ${T'}^2 = T$, comme T est inversible on a T' est inversible (en effet $(\det T')^2 = \det T \neq 0$ soit $\det T' \neq 0$) d'où pour $T \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure il existe $T' \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que ${T'}^2 = T$

b) Ici $a = i$, $b = -1$, $c = -i$ en prenant $x = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = i$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ on obtient

$$T' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & i & -\frac{1}{2} + i\frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

4. D'après **Partie D 2.** $\mathcal{R}(T) \neq \varnothing$ et avec **Préliminaires 3.** on en déduit que $\mathcal{R}(M) \neq \varnothing$

Problème II

Partie A

1. Voir le cours :
Pour f une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ définie sur un intervalle $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^t$ entre 0 et n ($a = 0$, $b = n$) à l'ordre n il vient alors

$$e^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^n (n-x)^n e^x \mathrm{d}x$$

3. En divisant les deux membres de l'égalité précédente par e^{-n} il vient :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} e^{-n} + \frac{1}{n!}\int_0^n (n-x)^n e^{x-n} \mathrm{d}x$$

En effectuant le changement de variable affine $t = n - x$ on obtient :

$$1 = \sum_{k=0}^{n} (1) : \frac{n^k}{k!} e^{-n} + \frac{1}{n!}\int_0^n t^n e^{-t} \mathrm{d}t$$

Remarque 4 *On peut obtenir directement la formule* (1) *en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction* $t \mapsto e^{-t}$ *entre* n *et* 0 ($a = n\, b = 0$)

4. a) pour n impair :

t	$-\infty$		0		n		$+\infty$
${g_n}'(t)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$g_n(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$n^n e^{-n}$	$\searrow$	0

pour n pair :

t	$-\infty$		0		n		$+\infty$
${g_n}'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g_n(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$n^n e^{-n}$	$\searrow$	0

b) en utilisant les variations de la fonction g_n il vient : pour $t \in [k-1, k] \subset [0, n]$
$(k-1)^n e^{-(k-1)} \leq t^n e^{-t} \leq k^n e^{-k}$, en intégrant on en déduit :

$$(k-1)^n e^{-k+1} \leq \int_{k-1}^{k} t^n e^{-t} \mathrm{d}t \leq k^n e^{-k}$$

c) En utilisant la question précédente on a pour $n > 0$ et $k \in [\![1, n]\!]$
$\displaystyle\int_{k-1}^{k} t^n e^{-t} \mathrm{d}t \leqslant k^n e^{-k}$
En sommant l'inégalité membre à membre il vient :
$\displaystyle\int_{0}^{n} t^n e^{-t} \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^n e^{-k} \quad (*)$
De même en sommant l'inégalité : $(k-1)^n e^{-k+1} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$ on a :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k-1)^n e^{-k+1} \leqslant \int_{0}^{n} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^n e^{-k} \leqslant \int_{0}^{n} t^n e^{-t} \mathrm{d}t \quad (*)$
Des deux inégalités $(*)$ on en déduit les inégalités demandées :

$$\mathbf{\frac{1}{n!} \int_{0}^{n} t^n e^{-t} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k^n e^{-k} \leqslant \frac{1}{n!} \int_{0}^{n} t^n e^{-t} \mathrm{d}t + \frac{n^n e^{-n}}{n!}}$$

5. On a : $S_n = e^{-n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k^n e^{-k}$
En utilisant la formule (1) de la question 3. de la partie A il vient :
$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = 1 - \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{0}^{n} t^n e^{-t} \mathrm{d}t + \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k^n e^{-k}$
En utilisant les inégalités de la question A 4.c on obtient :
$1 - \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_{0}^{n} t^n e^{-t} \mathrm{d}t + \frac{1}{n!} \int_{0}^{n} t^n e^{-t} \mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant 1 - \frac{1}{n!} \int_{0}^{n} t^n e^{-t} \mathrm{d}t + \frac{1}{n!} \int_{0}^{n} t^n e^{-t} \mathrm{d}t + \frac{n^n e^{-n}}{n!}$
$1 \leqslant S_n \leqslant 1 + \dfrac{n^n e^{-n}}{n!} \quad (**)$
En utilisant le résultat admis : $n! \underset{\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ (c'est la formule de Stirling) on a : $\dfrac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}$
on en déduit $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n e^{-n}}{n!} = 0$ et avec les inégalités $(**)$ il vient

$$\lim_{\mathbf{n} \to +\infty} \mathbf{S_n} = 1$$

Partie B

1. $f : t \mapsto \exp(-t^2)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ de sorte que h est la primitive de f qui s'annule en 0.
h est alors une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en particulier elle est dérivable sur $\mathbb{R}+$,
$h'(x) = \exp(-x^2) > 0$ de sorte que h est croissante sur $[0, +\infty[$, h admet donc une limite en $+\infty$, montrons que cette limite est finie, pour cela il suffit de montrer que h est majorée sur $[0, +\infty[$.
Pour $t \geqslant 1$ on a $\exp(-t^2) \leqslant \exp(-t)$, soit
pour $x \geqslant 1$, $h(x) = \displaystyle\int_{0}^{1} \exp(-t^2) \mathrm{d}t + \int_{1}^{x} \exp(-t^2) \mathrm{d}t$
$h(x) \leqslant 1 + \displaystyle\int_{1}^{x} \exp(-t) \mathrm{d}t$ (on a utilisé $\exp(-t^2) \leqslant 1$)
$h(x) \leqslant 1 + \exp(-1) - \exp(-x)$
$h(x) \leqslant 1 + e^{-1}$
de sorte que h est croissante et majorée sur $[0, +\infty[$ elle admet donc une limite finie en $+\infty$

2. $v_n = \displaystyle\int_{0}^{n} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$ posons $x = 1 - \dfrac{t}{n}$, $n \geqslant 1$ on en déduit $v_n = \displaystyle\int_{0}^{1} (n - nx)^n e^{nx-n} n \mathrm{d}x$ puis :
$v_n = n^{n+1} e^{-n} \displaystyle\int_{0}^{1} (1-x)^n e^{nx} \mathrm{d}x$ soit :
$v_n = n^{n+1} e^{-n} \displaystyle\int_{0}^{1} \left((1-x)e^x\right)^n \mathrm{d}x$

3. a) En utilisant la définition de w_n et la valeur de v_n on a : $w_n = n^{-n-\frac{1}{2}}e^n \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} n^{n+1}e^{-n} \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^{nx}\mathrm{d}x$ en simplifiant on en déduit
$w_n = \sqrt{\dfrac{n}{2\pi}} \displaystyle\int_0^1 e^{n(x+\ln(1-x))}\mathrm{d}x$

b) En écrivant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 pour la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ entre 0 et x, $x \in [0,1]$ on a : $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + R_2(x)$ avec $R_2(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{(x-t)^2}{2} \cdot \dfrac{2}{(t-1)^3}\mathrm{d}t$, pour $x \in [0,1]$ on a $R_2(x) \leqslant 0$ on en déduit :
$\forall x \in [0,1],\ x + \ln(1-x) \leqslant -\dfrac{x^2}{2}$

c) D'après 3.a) et b) il vient :
$w_n \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2\pi}} \displaystyle\int_0^1 \exp(-n\dfrac{x^2}{2})\mathrm{d}x$
Avec le changement de variable $u = x\sqrt{\dfrac{n}{2}}$ on a $\mathrm{d}u = \sqrt{\dfrac{n}{2}}\mathrm{d}x$ et
$w_n \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2\pi}} \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{n}{2}}} \exp(-u^2)\sqrt{\dfrac{2}{n}}\mathrm{d}u$ soit
$w_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} h(\sqrt{\dfrac{n}{2}})$ d'où
$w_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ en utilisant que h est croissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. d'où

$$w_n \leqslant \frac{1}{2}$$

4. a) $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$

b) De la question précédente on déduit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$
Pour $\varepsilon \in]0,1[$ comme $-\dfrac{1}{2}(1+\varepsilon) < -\dfrac{1}{2}$ $\exists \alpha \in]0,1[$ tel que $\forall x \in]0,\alpha]$ $\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2} \geqslant -\dfrac{1}{2}(1+\varepsilon)$ on en déduit :

$$\forall x \in [0,\alpha],\ x + \ln(1-x) \geqslant -\frac{x^2}{2}(1+\varepsilon)$$

c) En reprenant 3.a) avec 4.b) il vient :
$w_n \geqslant \sqrt{\dfrac{n}{2\pi}} \displaystyle\int_0^\alpha \exp(n(-\dfrac{x^2}{2})(1+\varepsilon))\mathrm{d}x$ $\quad (\alpha \in]0,1[$ et $\exp(n(-\dfrac{x^2}{2})(1+\varepsilon)) > 0)$
En posant $u = x\sqrt{\dfrac{n(1+\varepsilon)}{2}}$ on déduit :
$w_n \geqslant \sqrt{\dfrac{2}{n(1+\varepsilon)}} \cdot \sqrt{\dfrac{n}{2\pi}} \displaystyle\int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n(1+\varepsilon)}{2}}} \exp(-u^2)\mathrm{d}u$ soit
$w_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi(1+\varepsilon)}} h(\alpha\sqrt{\dfrac{n(1+\varepsilon)}{2}})$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} h(\alpha\sqrt{\dfrac{n(1+\varepsilon)}{2}}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'après le résultat admis dans B 1.
Pour $\varepsilon > 0$ on a
$\sqrt{1+\varepsilon} < 1+\varepsilon$ soit
$\dfrac{1}{2\sqrt{1+\varepsilon}} > \dfrac{1}{2(1+\varepsilon)}$
de $w_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi(1+\varepsilon)}} h(\alpha\sqrt{\dfrac{n(1+\varepsilon)}{2}})$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\pi(1+\varepsilon)}} h(\alpha\sqrt{\dfrac{n(1+\varepsilon)}{2}}) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+\varepsilon}} > \dfrac{1}{2(1+\varepsilon)}$ on déduit : $\exists N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow w_n \geqslant \dfrac{1}{2(1+\varepsilon)}$

5. de 3. c) et 4.d) de la partie B on a $\forall \varepsilon \in]0,1[,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow \dfrac{1}{2(1+\varepsilon)} \leqslant w_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ soit $1+\varepsilon \geqslant \dfrac{1}{2w_n} \geqslant 1$
D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2w_n} = 1$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{v_n}{n!} = \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}}{n!} w_n$

D'après le résultat admis on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}}{n!} = 1$ d'où

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{n!} = \frac{1}{2}$$

6. D'après A 5. $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1$ or $S_n = e^{-n} u_n + \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} k^n e^{-k}$

$v_n = \displaystyle\int_0^n t^n e^{-t} \mathrm{d}t$ et $\dfrac{1}{n!} v_n \leqslant \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} k^n e^{-k} \leqslant \dfrac{1}{n!} v_n + \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$ d'après A 4.c)

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^n e^{-n}}{n!} = 0$ (vu dans A 5.) et comme

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n}{n!} = \dfrac{1}{2}$ on a

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} k^n e^{-k} = \dfrac{1}{2}$

En utilisant la définition de S_n et le résultat de A 5. il vient avec le résultat précédent :

$\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} u_n = 1 - \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} u_n = \dfrac{1}{2}$

soit

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$$