Contrôle n˚9 (30mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions numériques définies sur un ensemble* A *non vide à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) et* f *une fonction numérique de* A *dans* $\mathbb{K}$*, définie sur* A*.*

1 *Donner la définition de* $(f_n)_n$ *converge simplement vers* f *sur* A *et donner un exemple dont on justifiera la convergence.*

2 *Donner la définition de* $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* A *et donner un exemple dont on justifiera la convergence.*

3 *Donner la définition de* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *converge simplement sur* A

4 *Donner la définition de* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *converge uniformément sur* A

5 *Donner la définition de* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *converge normalement sur* A *et donner un exemple dont on justifiera la convergence.*

Exercice 2

Les séries numériques suivantes sont-elles convergentes ou divergentes (justifier vos réponses) :

1 $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{e^{in}}{(1+e)^n}$

2 $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{1+n^{-n}}$

3 $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n^3\sin(\sqrt{n})2^{-n}}{\sqrt{n+1}}$

4 $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n^4+1}e^{-\sqrt{n}}$

5 $x\in\mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1+e^{in}}{n!}$ *montrer que la série converge et donner alors sans justification sa somme.*

Exercice 3

On considère la fonction : $x\in\mathbb{R},\ F(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\sin(nx)}{1+n!}$

1 *Pour* $p\in\mathbb{N}$ *étudier la convergence de la série numérique :* $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{n^p}{1+n!}$

2 *Montrer que* F *est définie et continue sur* $\mathbb{R}$*.*

3 *Montrer que* F *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

4 *Montrer que* F *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$*.*

Exercice 4

1 *Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$

2 *Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable réelle* $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$

3 *Déterminer le rayon de convergence de* $\sum\limits_{n\geqslant} e^{i\sqrt{n}}z^n$

Exercice 5 (hors barème)

Soit E *un* $\mathbb{C}$ *espace vectoriel de dimension* $n\in\mathbb{N}^*$ *et* f *un endomorphisme de* E *distinct de l'identité de* E*, indiquer en justifiant votre réponse si l'endomorphisme* f *est diagonalisable dans les cas suivants :*

1 f *vérifie* $f^3-3f^2+3f-Id=0$

2 $n=3$ *et* f *a pour matrice dans une base de* E*,* $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$

3 $P(f)$ *est diagonalisable où* $P\in\mathbb{C}[X]$ *et si* λ *est racine de* $P'(X)$ *alors* $P(\lambda)$ *n'est pas valeur propre de* $P(f)$*.*