Contrôle n°8 (30mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1
Les séries numériques suivantes sont-elles convergentes ou divergentes (justifier vos réponses) :

1. $u_n = \dfrac{e^n + 1}{n^4}$
2. $u_n = \dfrac{n^4}{1+n!}\cos n$
3. $u_n = e^{-n}\sqrt{2+n^2}$
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$
5. $u_n = \left(\dfrac{\sin\sqrt{2}}{2}\right)^n$
6. $u_n = \dfrac{e^n}{\sqrt{(e^2+1)^n}}$

Exercice 2 *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions numériques définies sur un ensemble A non vide à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et f une fonction numérique de A dans $\mathbb{K}$, définie sur A.*

1. *Donner la définition de $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur A et donner un exemple dont on justifiera la convergence.*
2. *Donner la définition de $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A et donner un exemple dont on justifiera la convergence.*
3. *Donner la définition de $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur A*
4. *Donner la définition de $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur A*
5. *Donner la définition de $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur A et donner un exemple dont on justifiera la convergence.*

Exercice 3 *Les propositions suivantes sont-elle vraies ou fausses ? (répondre Vrai ou Faux)*
(les réponses incorrectes seront sanctionnées).

1. *Si la série de fonctions numériques $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur l'intervalle I Alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur l'intervalle I.*
2. *Si la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur l'intervalle I Alors la série de fonctions numériques $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur l'intervalle I.*
3. *Pour toute série de fonctions numériques définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I dire si les affirmations suivantes sont Vraies ou Fausses :*
   a) *Si $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I Alors $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x_n)$ converge dans $\mathbb{R}$.*
   b) *Si $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = 0$.*
   c) *Si $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur I Alors $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x_n)$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Exercice 4 *On considère la fonction F définie par $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$*

1. *Montrer que F est définie sur $]0,+\infty[$*
2. *Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$ est uniformément convergente sur $]0,+\infty[$*
3. *Montrer que F est continue sur $]0,+\infty[$*

Exercice 5 (hors barême) *On considère $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes complexes convergente, on pose :*

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ et } v_n = S_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

1. *Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ converge*
2. *Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{u_n}{n}$ converge*
3. *Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{ixn}}{n}$, montrer que F est définie et continue sur $]0, 2\pi[$.*