Contrôle n°7 (30mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique nulle.

Exercice 1

Soit E un $\mathbf{K}$ espace vectoriel

1. *Donner la définition d'un hyperplan de E*
2. *Pour $E = \mathbb{R}[X]$ donner un exemple d'hyperplan*
3. *On suppose* $\dim E = n$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e_n})$ *est une base de E.*
   a) *Donner la définition de la base duale de $\mathcal{B}$*
   b) *Si $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ est une base de E^* donner la définition de la base anté-duale*
4. *On suppose* $\dim E = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, *soit* $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e_n})$ *une base de E et* $\mathcal{B}^* = ({e_1}^*, \cdots, {e_n}^*)$ *sa base duale.*
   a) *Donner la décomposition d'un vecteur $\vec{x}$ de E dans la base $\mathcal{B}$*
   b) *Donner la décomposition d'une forme linéaire φ de E^* dans la base $\mathcal{B}^*$*

Exercice 2

E est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice M dans la base $\mathcal{B}$.
Dans les cas suivants donner les valeurs propres de f et indiquer si f est diagonalisable, trigonalisable sans être diagonalisable, ou rien du tout, on justifiera les réponses :

1) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ 3) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3

$E = \mathbf{K_2}[\mathbf{X}] = \{\mathbf{P} \in \mathbf{K}[\mathbf{X}],\ \mathrm{d}^\circ\mathrm{P} \leq 2\}$. *On pose* $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$.

1. *Déterminer les polynômes de Lagrange associés aux points a_0, a_1, a_2. C'est à dire les polynômes L_0, L_1, L_2 de E tels que :* $L_i(a_j) = \begin{cases} 1 \text{ si i} = \text{j} \\ 0 \text{ si i} \neq \text{j} \end{cases}$
2. *Montrer que (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbf{K_2}[\mathbf{X}]$ et déterminer la base duale.*
3. *Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in E$ que l'on déterminera tel que :*
   $P(-1) = 1,\ P(0) = -1,\ P(1) = 1.$

Exercice 4

On considère la fonction définie par : $x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$

1. *Enoncer le théorème complet de Leibniz des séries numériques alternées.*
2. *Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$*
3. *Montrer que* $0 < F(-1) < \dfrac{1}{4}$
4. *Quel est le signe de $F(-2)$? (Justifier la réponse)*

Exercice 5 (hors barême)

1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.*
   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0$
2. *On considère $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in E$ une fonction non constante.*
   a) *Montrer que la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de E.*
   b) *En déduire les sous-algèbres de E de dimension finie.*