Contrôle n°6 (30mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. *Donner la définition du polynôme minimal de f.*
2. *Pour $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique, donner un exemple d'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont on déterminera le polynôme minimal et le polynôme caractéristique.*
3. *Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation de f concernant un polynôme annulateur de f.*
4. *Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisation de f concernant le polynôme caractéristique, les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres de f.*
5. *Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(f) = 0$ alors Q divise le polynôme caractéristique de f (répondre Vrai ou Faux).*
6. *Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(f) = 0$ alors le polynôme minimal de f divise Q (répondre Vrai ou Faux).*

Exercice 2

On considère f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$.
Dans les cas suivants déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de f et dire si f est diagonalisable (on justifiera la réponse) :

1. $n = 2$ *et* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
2. $n = 3$ *et* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $n = 4$ *et* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *et* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = 1$.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice M dans $\mathcal{B}$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Quel est le rang de M et de f ?*
2. *Déterminer une droite et un plan stable par f*
3. *Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f*
4. *Quelles sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ?*
5. *f est-il diagonalisable ?*

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$ (on dit que f est un endomorphisme nilpotent d'indice n).
Soit $e \in E$ tel que $f^{n-1}(e) \neq 0$ et on pose $u = f^{n-1}(e)$.

1. *Montrer que* $\dim \ker f \geq 1$ *et* $\dim \mathrm{Im} f \leq n - 1$
2. *Déterminer les valeurs propres de f.*
3. *Montrer que $(e, f(e), \dots, f^{n-1}(e))$ est libre et en déduire que c'est une base de E.*
4. *En déduire que le rang de f est $n - 1$ et que* $\dim \ker f = 1$
5. *On suppose que $g \in \mathcal{L}(E)$ et vérifie $f \circ g - g \circ f = f$.*
   Montrer que u est un vecteur propre de g

Exercice 5 (hors barême)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$, on suppose que f est nilpotent (c'est à dire $\exists n \in \mathbb{N}$, $f^n = 0$) et que $f \circ g - g \circ f = g$
Montrer que $g = 0$.