Contrôle n°5 (30mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$:

1. *Enoncer le théorème du rang.*
2. *Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (les réponses incorrectes seront sanctionnées)*
   - *a) Si* $(f \circ f)(E) = f(E)$ *Alors f est une projection vectorielle.*
   - *b) Si* $\ker(f) = \{0\}$ *Alors f est une bijection.*
   - *c) Si* $E = \ker f \oplus \mathtt{Im} f$ *Alors f est une projection vectorielle.*
   - *d) Si* $E = \ker(f - \mathtt{Id}) \oplus \ker(f + \mathtt{Id})$ *Alors f est une symétrie vectorielle.*

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), f et g deux endomorphismes de E, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

Indiquer si les affirmations suivantes sont Vraies ou Fausses

(répondre Vrai ou Faux, les réponses incorrectes seront sanctionnées) :

1. **Si** $E = E_1 \oplus E_2$, $\vec{x} \in E$ *et* $\vec{x} \notin E_1$ **Alors** $\vec{x} \in E_2$
2. **Si** $E = E_1 + E_2$ **Alors** $\dim E = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim E_1 \cap E_2$.
3. $E_1 + E_2 = \text{Vec} < E_1 \cup E_2 >$
4. **Si** $E = E_1 \oplus E_2$, $f_{|E_1}$ *et* f_{E_2} *sont des projections vectorielles*
   Alors *f est une projection vectorielle.*
5. **Si** $E = E_1 \oplus E_2$, $f_{|E_1} = g_{|E_1}$ *et* $f_{|E_2} = g_{|E_2}$ **Alors** $f = g$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $\mathcal{S} = (\vec{u}_i)_{i \in I} \in E^I$, pour $\vec{a} \in E$ on considère le système : $(S) : \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{a} \\ (\alpha_i)_{i \in I} \ \mathbb{K}^{(I)} \end{array} \right.$

Compléter les phrases suivantes :

1. *$\mathcal{S}$ est libre si et seulement si* $\forall \vec{a} \in E \cdots$
2. *$\mathcal{S}$ est un système générateur si et seulement si* $\forall \vec{a} \in E \cdots$
3. *$\mathcal{S}$ est une base si et seulement si* $\forall \vec{a} \in E \cdots$

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes en justifiant brièvement votre réponse :

1. $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{1+n}}$
2. $G(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + x^2}$

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

On considère l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice M dans $\mathcal{B}$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Quel est le rang de M et de f ?*
2. *Déterminer une droite et un plan stable par f*
3. *Déterminer $f(\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$ et $f(\vec{e}_1 - \vec{e}_3)$*
4. *Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f*
5. *Le noyau et l'image sont-ils supplémentaires dans E ?*
6. *f est-il diagonalisable ?*

Exercice 5 (hors barême)

1. *Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.*
   Montrer que $|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leqslant \text{rg}(u + v) \leqslant \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$
2. *On considère $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $f \in E$ une fonction non constante.*
   - *a) Montrer que la famille $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de E.*
   - *b) En déduire les sous-algèbres de E de dimension finie.*