# **Contrôle n°4** (30mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

**Exercice 1** *Les séries suivantes sont-elles convergentes ? (justifier vos réponses) :*

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n^2+1)}{n^2+1}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{e^{i\cos n}}{n^2+\cos n}$ *où* $i \in \mathbb{C}$, $i^2=-1$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{2n^2+1}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(e+1)^n}{e^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} e^{\frac{1}{n}} - nln(1+\frac{1}{n})$

**Exercice 2**

*Soit* $E=\mathbb{R}^3$ *rapporté à sa base canonique* $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$.

*On considère l'endomorphisme* $f \in \mathcal{L}(E)$ *de matrice* $M$ *dans* $\mathcal{B}$ *où* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

1. *Quel est le rang de* $M$ *et de* $f$ *?*
2. *Quelle est la dimension du noyau et de l'image de* $f$ *?*
3. *Déterminer une base du noyau de* $f$ *et une base de l'image de* $f$
4. *Le noyau et l'image de* $f$ *sont-ils supplémentaires ? (justifier votre réponse)*

**Exercice 3**

1. *Donner la définition de la caractéristique d'un anneau commutatif* $(A,+,\times)$
2. *Donner un exemple d'un anneau de caractéristique* 2.
3. *Quels sont les idéaux d'un corps* $(K,+,\times)$ *?*
4. *Soit* $I$ *un ensemble non vide et* $(E,+,.)$ *un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel*
   a) *Que désigne le support d'une famille* $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ *?*
   b) *Que désigne* $E^{(I)}$ *?*

**Exercice 4**

1. a) *Soit* $S=(\vec{x}_i)_{i\in I}$ *une famille de vecteurs d'un espace vectoriel* $E$, *donner la définition de* $S$ *est une famille libre de* $E$.
   b) *On suppose que* $E=\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *et on considère la famille* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n e^x$.
   *Montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille libre de* $E$. *Puis montrer que ce n'est pas une base de* $E$.
2. *Pour* $x \in ]0,+\infty[$, *montrer l'existence et déterminer la limite suivante :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+x^2)^k} e^{-kx}$$

**Exercice 5 (hors barême)**

*On considère un* $\mathbb{K}$ *espace vectoriel de dimension* $n$ *et* $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$ *tel que :*
$u+v$ *est inversible et* $u \circ v = 0$.
*Montrer que* $E = \mathrm{Im}u \oplus \mathrm{Im}v$.