Contrôle n°3 (30mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

1. *Donner le théorème complet de convergence pour une série alternée* $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ *où* $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geqslant 0$
2. *Montrer que* $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}$ *converge.*
3. *Pour* $x\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$ *on pose* $S(x)=\frac{1}{1+x}$, $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-x)^k$, $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$
   - *a) Calculer* $S_n(x)$
   - *b) Simplifier* $R_n(x)$
   - *c) Montrer que* $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 R_n(t)\mathrm{d}t=0$
4. *Montrer que* $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$
5. *Montrer que :* $\frac{1}{2}\leqslant \ln 2\leqslant \frac{5}{6}$

Exercice 2 *Les séries suivantes sont-elles convergentes ? (justifier vos réponses) :*

1. $\sum_{n\geqslant 0}\frac{\sin(n\sqrt{2})}{1+n^2}$
2. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{e^{i\cos n}}{n^2+\cos n}$ *où* $i\in\mathbb{C}$, $i^2=-1$
3. $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{2n^2+1}$
4. $\sum_{n\geqslant 0}\frac{e^n}{(1+e)^n}$

Exercice 3

1. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite numérique réelle :*
   Si $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ *Alors* $(u_n)_n$ *est décroissante à partir d'un certain rang. (répondre Vrai ou Faux)*
2. *Si* $u_n=\frac{(-1)^n}{n}+O(\frac{1}{n^2})$ *Alors* $\sum_{n\geq 1}u_n$ *converge. (répondre Vrai ou Faux et justifier la réponse)*
3. *Si* $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^2})$ *Alors* $\sum_{n\geq 1}u_n$ *converge. (répondre Vrai ou Faux et justifier la réponse).*
4. *Pour* $n\in\mathbb{N}^*$ *posons* $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sqrt{1+\frac{1}{k}}$,
   sachant que $S_n\underset{+\infty}{\sim}\ln n$ *en déduire un équivalent de* T_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$.

Exercice 4

Soit $E=\mathbb{R}^3$ *rapporté à sa base canonique* $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$.

On considère l'endomorphisme $f\in\mathcal{L}(E)$ *de matrice* M *dans* $\mathcal{B}$ *où* $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$

1. *Quel est le rang de* M *et de* f *?*
2. *Quelle est la dimension du noyau et de l'image de* f *?*
3. *Déterminer une base du noyau de* f *et une base de l'image de* f
4. *Le noyau et l'image de* f *sont-ils supplémentaires ? (justifier votre réponse)*

Exercice 5 (hors barême)

Soit $\sum_{n\geqslant 0}u_n$ *une série à termes strictement positifs convergente.*

On pose $R_{-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$ *et pour* $n\in\mathbb{N}$, $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$, $v_n=\frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}+\sqrt{R_n}}$

1. *Montrer que* $\sum_{n\geqslant 0}v_n$ *converge*
2. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}$ *et comparer* u_n *et* v_n *lorsque* n *tend vers* $+\infty$ *que peut-on conclure ?*