Contrôle n°23 (45mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

On considère la partie U de $\mathbb{R}^2$ définie par $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > y\}$, V définie par $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 > y\}$ et la fonction f définie sur U par $f(x,y) = (x+y, 4xy)$.

1. *Montrer que U et V sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$*
2. *Montrer que $V = f(U)$.*
3. *Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de U sur V*

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$*
2. *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$*
3. *Montrer l'existence et calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$*
4. *f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?*

Exercice 3

Etudier les extréma locaux et globaux sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction f définie par

$$f(x,y) = x^2 + x^2 y + y^3$$

Exercice 4

Dans l'espace euclidien rapporté à un repère orthormé on considère pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ la quadrique Σ_λ d'équation :

$$x^2 - 2\lambda yz = 1$$

et la forme quadratique Q définie sur l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ par $Q(x,y) = x^2 - 2\lambda yz$

1. *Déterminer la matrice M dans la base canonique de la forme quadratique Q.*
2. *Déterminer les valeurs propres de M*
3. *Quelle est la nature de la quadrique Σ_λ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$?*
4. *Pour quelles valeurs de λ Σ_λ est une quadrique de révolution ?*
   (on rappelle qu'une quadrique est une quadrique de révolution si et seulement si sa matrice admet une valeur propre d'ordre de multiplicité au moins deux).

Exercice 5 (hors barême)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère l'ellipsoïde $\mathscr{E}$ d'équation :

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$$

1. *Montrer que l'intersection des plans P_λ d'équation $z - x = \lambda$ et P'_λ d'équation $z + x = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\mathscr{E}$ est un cercle, un point ou l'ensemble vide.*
2. *Préciser l'ensemble des centres des cercles.*