Contrôle n°22 (40mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

On considère la partie U de $\mathbb{R}^2$ définie par $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < x\}$ et la fonction f définie sur U par $f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$.

1. *Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$*
2. *Montrer que $f(U) = U$*
3. *Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de U sur U*

Exercice 2

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle, soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$,
$U =]0, +\infty[\times] - \pi, +\pi[$, $\Omega = R^2 \setminus \{(x, 0) \in R^2,\ x \leqslant 0\}$,

$$\varphi : \begin{array}{ccc} U & \to & \Omega \\ (\rho, \theta) & \mapsto & (x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array}$$

on rappelle que φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur Ω, la bijection réciproque est définie par :
$\varphi^{-1}(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\,,\ 2\arctan \dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$. *on pose*
pour $\theta \in] - \pi, \pi[$, $\vec{u}_\theta = \cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2$ et $\vec{v}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2$.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω, on pose $F = f \circ \varphi$.On considère le gradient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\vec{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\vec{e}_2$$

Montrer que :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y) = \frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho, \theta)\vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \theta}(\rho, \theta)\vec{v}_\theta, \quad \textit{avec } (x, y) = \varphi(\rho, \theta)$$

Exercice 3

Etudier les extréma locaux et globaux sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction f définie par

$$f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6$$

Exercice 4

Pour I intervalle de $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle :

$$(E) : \begin{cases} t^2 x'' - 2x = 3t^2 \\ (t, x) \in I \times \mathbb{R} \end{cases}$$

1. *Que peut-on dire de l'intervalle de définition des solutions maximales de (E) lorsque $0 \notin I$? Justifier votre réponse.*
2. *Montrer que la fonction x définie par $x(t) = t^2$ est solution de l'équation homogène associée à (E).*
3. *Résoudre l'équation différentielle (E) sur chacun des intervalles $I_1 =]0, +\infty[$ et $I_2 =] - \infty, 0[$*
4. *Existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 5 (Hors barême)

Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$