Contrôle n°21 (40mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$

1. *Montrer que l'ensemble $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y>0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$*
2. *Pour $(x,y)\in U$ et $t>0$ on pose $\varphi(t)=f(tx,ty)$, calculer $\varphi'(t)$ et $\varphi''(t)$ et exprimer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$ en fonction de :* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.
3. *Pour $(x,y)\in U$, calculer en fonction de $f(x,y)$:*
   - $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
   - $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$

Exercice 2

On considère la partie U de $\mathbb{R}^2$ définie par $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0<y<x\}$ et la fonction f définie sur U par $f(x,y)=(x^2+y^2,x^2-y^2)$.

1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$. Pour $(a,b)\in U$, donner la définition de f est une fonction différentiable en (a,b).*
2. *Enoncer le théorème de $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme du cours pour une application f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.*
3. *Déterminer la matrice jacobienne de f en un point $(x,y)\in U$*
4. *Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$*
5. *Montrer que $f(U)=U$*
6. *Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de U sur U*

Exercice 3

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle, soit $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$,
$U=]0,+\infty[\times]-\pi,+\pi[$, $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\in\mathbb{R}^2,\ x\leqslant 0\}$,

$$\varphi:\ \begin{array}{ccc} U & \to & \Omega \\ (\rho,\theta) & \mapsto & (x,y)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\end{array}$$

on rappelle que φ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur Ω, la bijection réciproque est définie par :
$\varphi^{-1}(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}\,,\,2\arctan\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. *on pose*
pour $\theta\in]-\pi,\pi[$, $\vec{u}_\theta=\cos\theta\,\vec{e}_1+\sin\theta\,\vec{e}_2$ et $\vec{v}_\theta=-\sin\theta\,\vec{e}_1+\cos\theta\,\vec{e}_2$.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω, on pose $F=f\circ\varphi$. On considère le gradient :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\vec{e}_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\vec{e}_2$$

Montrer que :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}f(x,y)=\frac{\partial F}{\partial\rho}(\rho,\theta)\vec{u}_\theta+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial\theta}(\rho,\theta)\vec{v}_\theta,\ \text{ avec } (x,y)=\varphi(\rho,\theta)$$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle :

$$(E_c):\ \begin{cases} y'(x)=x(1+y^2)\\ y(0)=0\\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

1. *Montrer que (E_c) possède une unique solution maximale (I,φ)*
2. *Déterminer le couple (I,φ).*

Exercice 5 (hors barême)

On considère une fonction $\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec φ paire et les deux équations différentielles :

$$(E_1):\ \begin{cases} y''(t)+\varphi(t)y(t)=0\\ y(0)=1,\quad y'(0)=0\\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\end{cases}\qquad\text{et}\qquad (E_2):\ \begin{cases} y''(t)+\varphi(t)y(t)=0\\ y(0)=0,\quad y'(0)=1\\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\end{cases}$$

1. *Montrer que (E_k) possède une unique solution maximale $(\mathbb{R},f_k)$ pour $k\in[\![1,2]\!]$*
2. *Montrer que f_1 est paire et f_2 est impaire.*
3. *Montrer que le wronskien (c'est à dire le déterminant de la matrice wronskienne) de (f_1,f_2) est constant et égal à 1 sur $\mathbb{R}$.*