Contrôle n°20 (30mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

1. *Soit* $(E, <\,,\,>)$ *un espace euclidien et* $u \in \mathcal{L}(E)$*.*
   a) *Pourquoi l'endomorphisme* $u^* \circ u$ *est-il diagonalisable ?*
   b) *Exprimer la norme* $\| u \|$*, où* $\| \ \|$ *est la norme subordonnée à la norme euclidienne, en fonction des valeurs propres de* $u^* \circ u$*.(on ne demande pas de démonstration)*
   c) *On suppose que* $u^* \circ u = u \circ u^*$*. Montrer que* $\ker u = \ker u^*$

1. *Donner le théorème de convergence normale des séries de Fourier*
2. *Donner le théorème de Dirichlet de convergence simple des séries de Fourier*

Exercice 2

1. *Enoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour une équation différentielle linéaire :*

$$(E_c) : \begin{cases} \vec{x}\,'(t) = a(t).\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \\ (t, \vec{x}(t)) \in I \times F \\ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \end{cases}$$

   Préciser la nature de I*,* a*,* $\vec{b}$*,* F*,* $\vec{x}$ *puis les hypothèses et les conclusions du théorème.*

2. *On considère le système différentiel :*

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \\ (t, (x, y)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

   a) *Que peut-on dire de l'ensemble des solutions maximales de* $(\mathcal{S})$ *? (justifier votre réponse)*
   b) *Si* $V \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ *est un vecteur propre d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *associé à la valeur propre* λ*, montrer que la fonction* φ *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $\varphi(t) = e^{\lambda t}V$ *est une solution du système différentiel :*

$$\begin{cases} X' = AX \\ (t, X) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

   c) *Résoudre le système* $(\mathcal{S})$*.*

Exercice 3

Pour I *intervalle de* $\mathbb{R}$*, on considère l'équation différentielle :*

$$(E) : \begin{cases} t^2 x'' - 2x = 3t^2 \\ (t, x) \in I \times \mathbb{R} \end{cases}$$

1. *Que peut-on dire de l'intervalle de définition des solutions maximales de* (E) *lorsque* $0 \notin I$ *? Justifier votre réponse.*
2. *Montrer que la fonction* x *définie par* $x(t) = t^2$ *est solution de l'équation homogène associée à* (E)*.*
3. *Résoudre l'équation différentielle* (E) *sur chacun des intervalles* $I_1 =]0, +\infty[$ *et*
   $I_2 =]-\infty, 0[$
4. *Existe-t-il des solutions de* (E) *définies sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 4 (hors barême)

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' + q(x)y = 0$ *où* $q \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ *est croissante et telle que* $\lim\limits_{x \to +\infty} q(x) = +\infty$*. Montrer que toute solution* f *de* (E) *sur* $[0, +\infty[$ *est bornée.*
(On pourra considérer $\varphi = f^2 + f'^2 q^{-1}$*)*