Contrôle n°2 (30mn)

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé pour ce contrôle.

Exercice 1

1. *Donner le théorème de comparaison et de sommation de la relation de comparaison pour deux séries de nombres réels positifs* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ *telles que* $u_n = O(v_n)$
2. *Donner la règle de d'Alembert et un exemple d'utilisation.*
3. *Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln n.$

Exercice 2 *Les séries suivantes sont-elles convergentes ? (justifier vos réponses) :*

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin n}{1+n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{i\cos n}}{n^2+\cos n}$
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{2n^2+1}$
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\pi^n}{(1+\pi)^n}$

Exercice 3

On considère les fonctions $f_k, k = 1, \cdots, 4$ *définies par :*

$f_1(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad f_2(x) = \sin(x)$, $\quad f_3(x) = \ln(1-x)$, $\quad f_4(x) = \arctan(x)$.

1. *Ecrire le développement limité à l'ordre 5 en 0,* $DL_5(0)$*, de chacune des fonctions* f_k *,* $k = 1, \cdots, 4$.
2. *Ecrire le développement limité à l'ordre* $2n+1$ *en 0,* $DL_{2n+1}(0)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, de chacune des fonctions* f_k *,* $k = 1, \cdots, 4$.

Exercice 4

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante afin qu'une série à termes positifs converge.*
2. *Les propositions suivantes énoncées pour toutes suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *sont-elles vraies ou fausses :(répondre Vraie ou Fausse)*
   (une réponse incorrecte sera pénalisée)
   a) *Si* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge Alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
   b) *Si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge Alors* $\exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $(u_n)_{n\geqslant N}$ *est décroissante.*
   c) *Si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante avec* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ *alors* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
   d) *Si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ *et* $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ *converge Alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ *avec* $\ell \leqslant 1$.

Exercice 5 (hors barème)

Soit f *et* g *deux fonctions définies, continues sur* $[0,1]$ *et à valeurs réelles strictement positives.*
On pose :

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(\displaystyle\int_0^1 (f(x))^n \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}$, $v_n = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,(f(x))^n \,\mathrm{d}x$, $w_n = \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ *et* $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} f(t)$.

1. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = M$
2. *Montrer que* $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = M$